

Avanzi sulle funzioni convesse

Prop (Max/min di funzioni convesse)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora max esiste per forza. Inoltre

→ se esiste un p.to di min $x_0 \in (a, b)$, allora

$$f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$$

→ almeno uno degli estremi è p.to di max

Dim Max per forza agli estremi

- Se $f(a) = f(b) = c$, allora per convessità $f(x) \leq c$ per ogni $x \in [a, b]$, quindi a e b sono p.ti di max
- Se $f(a) \neq f(b)$, allora il più grande dei due è il max, ed è l'unico. [Vedi figura]



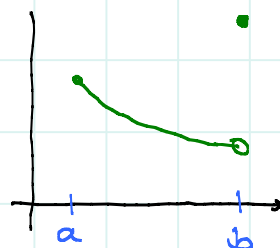
Per l'esistenza del minimo non posso usare la continuità, perché vale solo in (a, b) . In realtà però f è SCS in tutto $[a, b]$.

S infatti $f(x) \leq r(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, dove $r(x)$ è la retta che congiunge i valori agli estremi, quindi

$$\limsup_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow a^+} r(x) = f(a)$$

e stessa cosa in b^- .

Esempio min $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ potrebbe non esistere



LEMMA DELLA SOTTO-SOTTO

Sia $\{x_n\}$ una succ. di numeri reali.

Supponiamo che esista $l \in \overline{\mathbb{R}}$ con questa proprietà:

per ogni sotto-succ x_{n_k} , esiste una sotto-sotto-succ $x_{n_{k_i}}$ t.c.

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow l \quad (l \text{ è sempre lo stesso})$$

Allora

$$x_n \rightarrow l \quad (\text{stesso})$$

Dim Ci sarebbero 3 casi. Facciamo quello con $l \in \mathbb{R}$ (i casi $\pm\infty$ per esercizio).

Devo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 |x_n - l| \leq \varepsilon$$

Se per assurdo non fosse vero, allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall m_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq m_0 |x_n - l| > \varepsilon_0$$

cioè a_n è frequentemente lontana da l

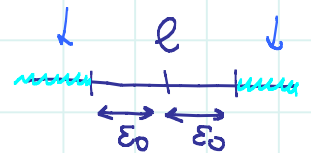
Quindi esiste una sotto-succ. x_{n_k} t.c. $|x_{n_k} - l| > \varepsilon_0$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ (basta prendere un primo elemento x_{m_0} e poi, dopo aver scelto $x_{m_0}, x_{m_1}, \dots, x_{m_k}$ giocare l'ipotesi di assurdo con $m_k + 1$)

Questa sotto-succ. x_{n_k} non può avere sotto-sotto che tendono ad l

— o — o —

qui frequentemente.



FUNZIONI INVERSE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Sia $f: A \rightarrow B$

iniettiva e surgettiva. Allora esiste $g: B \rightarrow A$

tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

Domande

Q1 Se f è monotona, g è monotona?

Q2 Se f è continua, g è continua?

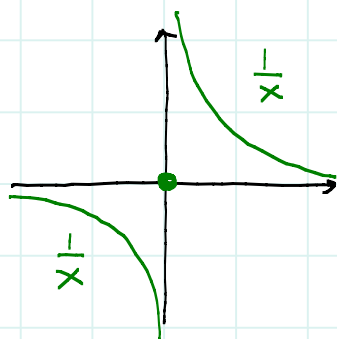
Q3 Se f è derivabile in $x_0 \in \text{Int}(A)$, posso dire che g è derivabile in $f(x_0)$?

Q4 Se f è C^1 , g è C^1 ?

Q5 Se f è C^{2026} , g è C^{2026} ?

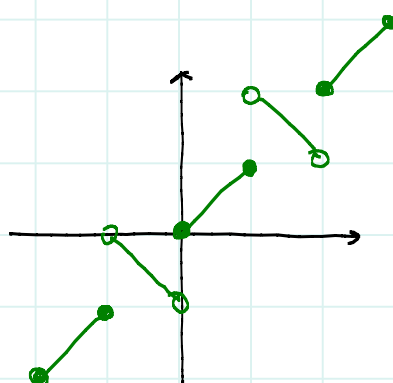
Esempio 1 Invertibile implica monotona?

No! Controesempio per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$



Q1 Risposta: SI

Dim Facciamo il caso f debolm. crescente.

In realtà è pure strett. cresc. (se fosse $f(a_1) = f(a_2)$ con $a_1 < a_2$ violerebbe l'iniettività)

Claim: anche g è strett. cresc.

Se per assurdo non lo fosse, avremmo

$$b_1 < b_2 \quad \text{con} \quad g(b_1) > g(b_2) \quad (= \text{è impossibile})$$

Se applico f ottengo

$$f(g(b_1)) > f(g(b_2)) \quad (f \text{ è strett. cresc.})$$

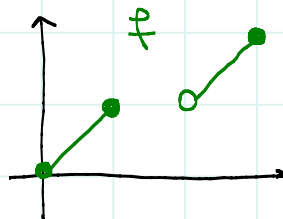
$\underbrace{\quad}_{b_1} \quad \underbrace{\quad}_{b_2}$

e questo non va bene.

— o — o —

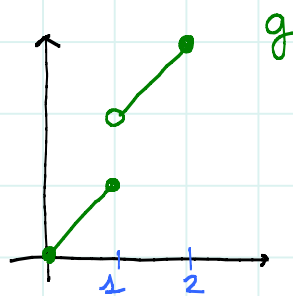
Q2

N1

Esempio

$$A = [0, 1] \cup (2, 3]$$

$$B = [0, 2]$$



Si vede che g è discontinua in 1.

Teo 1 Se $f: A \rightarrow B$ è invertibile e continua e A è compatto, allora g è continua

Teo 2 Se $f: A \rightarrow B$ è invertibile e continua e A è convesso, allora g è continua

Dim teo 1 Prendo $b \in B$ e $a = g(b)$.

Devo dim. che, per ogni successione $y_n \rightarrow b$ si ha $g(y_n) \rightarrow a = g(b)$.

Pongo $x_n = g(y_n) \in A$ e voglio dim. che $x_n \rightarrow a$.

Per farlo basta mostrare che ogni sotto succ. x_{n_k} ha $x_{n_{k_i}} \rightarrow a$.

Prendo $\{x_{n_k}\} \subseteq A$. Per cpt. esiste

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow x_\infty$$

Proprietà di x_∞ : $f(x_{n_{k_i}}) \rightarrow f(x_\infty)$ (f è continua)

$$y_{n_{k_i}} \rightarrow b$$

Quindi $b = f(x_\infty)$. Applicando g trovo $g(b) = g(f(x_\infty))$

$$\underset{a}{=} \underset{x_\infty}{g(f(x_\infty))}$$

— o — o —