

Esempio 1  $f(x) = e^x$  è convessa in tutto  $\mathbb{R}$  (derivata seconda)

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$e^x \geq \underbrace{1+x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

↑ retta tangente  
in  $(0, 1)$



Esempio 2  $f(x) = x^a$  definita per  $x > 0$

$$f'(x) = a x^{a-1}$$

$$f''(x) = a(a-1) x^{a-2}$$

Convessa per  $a \geq 1$  (a numero reale)

$$f'(1) = a$$

funzione  $\geq$  retta tangente  $\leadsto x^a \geq 1 + a(x-1) \quad \forall x > 0$

Se pongo  $x-1 = t$ , cioè  $x = 1+t$  diventa

$$(1+t)^a \geq 1 + at \quad \forall t > -1$$

Bernoulli con esponente  
reale  $a \geq 1$

Disuguaglianza di YOUNG Siano  $a$  e  $b$  reali positivi.

Sia  $p$  e  $q$  reali  $> 1$  t.c.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Allora

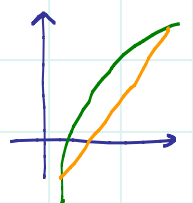
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Caso speciale Se  $p = q = 2$ , diventa  $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$

$$2ab \leq a^2 + b^2 \leadsto (a-b)^2 \geq 0$$

Dim  $f(x) = \log x$  è concava per  $x > 0$ , quindi

$$\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log x + (1-\lambda) \log y$$



La uso con  $\lambda = \frac{1}{p}$ ,  $1-\lambda = \frac{1}{q}$ ,  $x = a^p$ ,  $y = b^q$

Diventa 
$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q$$
$$= \log a + \log b = \log(ab)$$

Poiché  $\log$  è strett. cresc., lo posso semplificare

**YOUNG A 3**

$$abc \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q + \frac{1}{r}c^r$$

$$a, b, c > 0 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

**Dim** Jensen a 3 per il  $\log$

$$\log(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z) \geq \lambda_1 \log x + \lambda_2 \log y + \lambda_3 \log z$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $\frac{1}{p} \quad a^p \quad \frac{1}{q} \quad b^q \quad \frac{1}{r} \quad c^r$

Allo stesso modo si generalizza ad  $n$  termini

**CAUCHY-SCHWARZ**

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq [a_1^2 + \dots + a_n^2]^{\frac{1}{2}} [b_1^2 + \dots + b_n^2]^{\frac{1}{2}}$$

**Dim. classica** Pongo  $A = (a_1, \dots, a_n)$   
 $B = (b_1, \dots, b_n)$

Scrivo

$$0 \leq \|A + tB\|^2 = \|A\|^2 + 2t\langle A, B \rangle + t^2\|B\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi discriminante  $\leq 0$ , cioè

$$\langle A, B \rangle^2 - \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \leq 0, \quad \text{cioè} \quad |\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

## Disug. di Hölder (a 2 specie)

$$a_1 b_1 + \dots + a_m b_m \leq [a_1^p + \dots + a_m^p]^{\frac{1}{p}} [b_1^q + \dots + b_m^q]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$a_i$  e  $b_i$  reali positivi o nulli

**Dim** Se  $a_1^p + \dots + a_m^p = 0$  non è difficile  $\therefore$   
Se  $b_1^q + \dots + b_m^q = 0$  "  $\therefore$

Ora WLOG posso supporre che  $a_1^p + \dots + a_m^p = b_1^q + \dots + b_m^q = 1$ .  
Perché? Perché la disuguaglianza è OMOGENEA, cioè se moltiplico gli  $a_i$  per un certo  $\lambda$  ed i  $b_i$  per un certo  $\mu$ , allora posso raccogliere  $\lambda\mu$  al LHS e RHS e semplificarli.

Quindi ci siamo ridotti a dimostrare che

$$a_1 b_1 + \dots + a_m b_m \leq 1 \quad \text{quando} \quad a_1^p + \dots + a_m^p = b_1^q + \dots + b_m^q = 1.$$

Ora su ogni prodotto uso la disug. di YOUNG

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q, \quad \text{da cui}$$

$$\text{LHS} = \sum a_i b_i \leq \frac{1}{p} \sum a_i^p + \frac{1}{q} \sum b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \therefore$$

Allo stesso modo si dimostra il caso con 3 o più "specie"

$$\sum a_i b_i c_i \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left( \sum c_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\text{se} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

## DISOG. TRA LE MEDIE

Setting:  $a_1, \dots, a_n$  reali positivi

Media geometrica:  $[a_1 \cdot \dots \cdot a_n]^{\frac{1}{n}}$  (GM)

Media aritmetica  $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$  (AM)

Media  $p$ -esima:  $\left[ \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right]^{\frac{1}{p}}$   
Definita per ogni  $p \in \mathbb{R}$   
se per  $p=0$  si interpreta  
come GM

Proprietà fondamentale  $p \rightarrow M_p(a_1, \dots, a_n)$  è crescente.

Inoltre

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = \max\{a_1, \dots, a_n\} \quad \lim_{p \rightarrow -\infty} M_p = \min\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} M_p = \text{GM}$$

**GM  $\leq$  AM** cioè  $[a_1 \cdot \dots \cdot a_n]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$

Faccio  $\log$  a dx e sx e diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) &\leq \log\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \\ &= \frac{\log a_1 + \dots + \log a_n}{n} \quad \leadsto \text{Jensen del logaritmo} \end{aligned}$$

Ancora più generale  $a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$   
purché  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

**AM  $\leq$   $M_p$  per  $p > 1$**  cioè  $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \left[ \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right]^{\frac{1}{p}}$

cioè  $\left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^p \leq \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n}$

Jensen per la funzione  $f(x) = x^p$  che è convessa per  $p \geq 1$

Oss. Bastano questi due casi per coprire la monotonia di  $p \rightarrow M_p$  per  $p$  generico

(se voglio dim. che  $M_3 \leq M_{27}$  basta porre  $a_i^3 = b_i$  e mi riduco a  $M_1 \leq M_9$ )

Esercizio Il prodotto di due convessi è convesso?

$$f(x) = x \quad g(x) = x^2 \quad f(x) \cdot g(x) = x^3 \quad \ddot{}$$

[Brutal mode:  $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

... se fosse  $g \geq 0, f \geq 0$ ,  $f$  e  $g$  monotone dalla stessa parte...]

→ dimostrarlo senza usare le derivate

→ trovare controesempi quando manca qualche ipotesi  
— 0 — 0 —