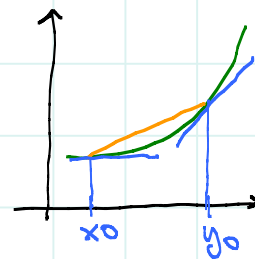


$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



→ $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono in ogni $x_0 \in \text{Int}(C)$

→ Se $x_0 < y_0$, allora

$$f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0) \leq f'_+(y_0)$$

→ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0)$ (f'_+ è continua a dx)

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0)$ (f'_- è continua a sx)

Dim per f'_+

Facile: $f'_+(x_0) \leq f'_+(x) \quad \forall x \geq x_0$

da cui

$$f'_+(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x)$$

esiste per monotonia

Meno facile

$$\begin{array}{ccc} x_0 & x & x_0+h \end{array}$$

Per ogni $x \in (x_0, x_0+h)$ vale

$$f'_+(x) \leq r(x, x_0+h)$$

Passo al limite per $x \rightarrow x_0^+$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x) \leq r(x_0, x_0+h)$$

Passo al limite per $h \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x) \leq f'_+(x_0)$$

→ Se in un certo x_0 accade che $f'_+(x)$ è continua (non solo a dx) allora $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, cioè in x_0 f è davvero derivabile.

[Enunciato analogo per la sinistra]

Dim Ora per ipotesi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_+(x) = f'_+(x_0)$



D'altra parte sappiamo che $f'_+(x) \leq f'_-(x_0)$ per ogni $x < x_0$ e quindi

corretto dopo video

$$f'_-(x_0) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sempre}}}{f'_+(x_0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp}}}{\lim_{x \rightarrow x_0^-}} f'_+(x) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. di sopra} \\ \text{passata al limite}}}{f'_-(x_0)}$$

Quindi alla fine coincide tutto.

— o — o —

Lemma (Dei 2/3 rapporti incrementali)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

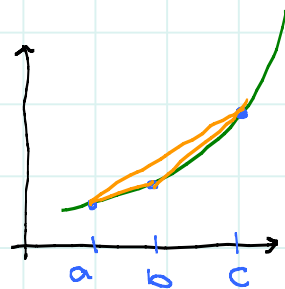
Allora sono fatti equivalenti

(i) f è convessa

(ii) $r(a,b) \leq r(a,c) \quad \forall a < b < c \text{ in } C$

(iii) $r(a,c) \leq r(b,c) \quad "$

(iv) $r(a,b) \leq r(b,c) \quad "$



Dim La stessa della lezione precedente

— o — o —

quasi teorema

Prop Sia $x_0 \in \text{Int}(C)$ un p.to di int. per una funzione convessa

Allora x_0 è p.to di min. $\Leftrightarrow f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$

Dim $\Rightarrow$ Se x_0 è p.to di min., allora $r(x_0, x_0+h) \geq 0$ per $h > 0$ e quindi, facendo $h \rightarrow 0^+$, si ottiene $f'_+(x_0) \geq 0$. Analogamente $r(x_0-h, x_0) \leq 0$ per $h > 0$ e passando al limite viene $f'_-(x_0) \leq 0$.

$\Leftarrow$ Se $x > x_0$, allora $r(x_0, x) \geq f'_+(x_0) \geq 0 \rightsquigarrow f(x) \geq f(x_0)$
Se $x < x_0$, allora $r(x, x_0) \leq f'_-(x_0) \leq 0 \rightsquigarrow f(x) \geq f(x_0)$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{(x_0 - x)_+} \leq 0$$

DISUGUAGLIANZE DI CONVESSITÀ

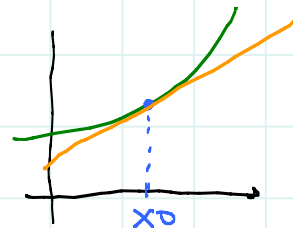
- funzione convessa sta sopra la retta tangente
- disuguaglianza di JENSEN

Conv. vs retta tangente

Versione classica: se f è convessa e C^2 , allora

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

↑ ↑
equazione retta tangente



Dim. classica

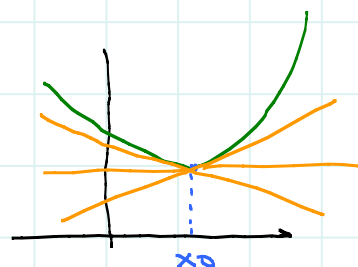
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{Taylor-Lagrange}} + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(c)(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

Versione minimalista

$f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, $x_0 \in \text{Int}(C)$

Sia $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$. Allora

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) \quad \forall x \in C$$



Dim

Se $x > x_0$, allora $\underbrace{r(x_0, x)}_{\text{"}} \geq f'_+(x_0) \geq m$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Basta moltiplicare per $x - x_0$

Se $x < x_0$, allora

$$\underbrace{r(x, x_0)}_{\text{"}} \leq f'_-(x_0) \leq m$$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq m$$

Anche adesso basta moltiplicare.

— 0 — 0 —

Disug. di JENSEN

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Sia $n \geq 2$ un intero

Siano $x_1, \dots, x_n$ in C

Sia $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri ≥ 0 t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Allora

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

DIM 1 Induzione su n .

Caso base $n=2$: def. di funzione convessa

$n \Rightarrow n+1$ Supponiamo wlog che $\lambda_{n+1} < 1$ e isoliamo l'ultimo

$$\text{LHS}_{n+1} = f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n \right)}_y)$$

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n}_{\hat{\lambda}_1 + \dots + \hat{\lambda}_n = 1}\right)$$

uso $\uparrow$ f convessa

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) \left\{ \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n) \right\}$$

uso hp $\uparrow$ induttiva

$$= \text{RHS}_{n+1}$$

DIM 2 Pongo $x_0 := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ e prendo $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$.

Per ogni k applico la storia della retta tangente

$$f(x_k) \geq f(x_0) + m(x_k - x_0)$$

Moltiplico per λ_k e ottengo

$$\lambda_k f(x_k) \geq \lambda_k f(x_0) + \lambda_k m (x_k - x_0)$$

Adesso sommo per $k = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \geq \sum_{k=1}^n [\lambda_k f(x_0) + \lambda_k m (x_k - x_0)]$$

$$= f(x_0) \underbrace{\sum_{k=1}^m \lambda_k}_1 + m \underbrace{\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k}_{x_0} - m x_0 \underbrace{\sum_{k=1}^m \lambda_k}_1$$

$$= f(x_0), \quad \text{cioè} \quad \text{RHS} \geq \text{LHS}$$

— o — o —

Caso speciale Se prendo $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \frac{1}{m}$, Jensen diventa

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m)}{m}$$

Provare a dimostrarla per induzione!

— o — o —