

Teoremi sulle funzioni unif. cont.

→ asintotico a costante $\Rightarrow$ unif. cont.

→ unif. cont. $\Rightarrow$ sublineare

Prop. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (esiste variante su $(-\infty, a]$)

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste ed è reale.

Allora f è unif. cont. in $[a, +\infty)$.

Dim Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e devo trovare $\delta > 0$ t.c.

$$x \geq a, y \geq a, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Dall'ipotesi (ii) segue, detto l il limite,

$$\exists A \geq a \quad \forall x \geq A \quad |f(x) - l| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Per l'ipotesi (i) + Heine Cantor sappiamo che f è unif. cont.

in $[a, A+2026]$, quindi

$$\exists \hat{\delta} > 0 \quad \forall x \in [a, A+2026] \quad \forall y \in [a, A+2026] \quad |x-y| \leq \hat{\delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Pongo

$$\delta := \min \{ \hat{\delta}, 2026 \}$$

← deve essere lo stesso usato sopra (oppure di meno)

e claimo che va bene.

Infatti, prendiamo $x \geq a$ e $y \geq a$ con $|x-y| \leq \delta$.

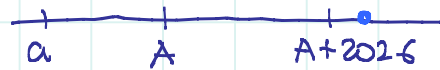
• Se sia x sia y sono $\geq A$, allora

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

• Se sia x sia y sono $\leq A+2026$, allora stanno in $[a, A+2026]$ e quindi OK per def. di $\hat{\delta}$.

• Non ci può essere un terzo caso perché x e y distano ≤ 2026 (se uno dei due è $\geq A+2026$, allora automaticamente siamo nel primo caso)



— o — o —

Corollario Siano $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f cont. in $[a, +\infty)$

(ii) g unif. cont. in $[a, +\infty)$

(iii) $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Allora f è unif. cont. in $[a, +\infty)$.

Dim

$$f(x) = \boxed{g(x)} + \boxed{f(x) - g(x)}$$

$\uparrow$ u.c. per ipotesi $\uparrow$ unif. cont. per la Prop. prec.
(è cont. e $\rightarrow 0$)

— o — o —

Prop Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funz. unif. cont.

Allora f è sublineare, cioè esistono A e B reali tali che

$$f(x) \leq A(x-a) + B \quad \forall x \geq a$$

(cioè f sta sotto una retta).

Def. Uso la def. di unif. cont. con $\varepsilon = 1$. Trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Claim: vale la tesi con

$$B := \max \{f(x) : x \in [a, a + \delta]\}$$

$$A := \frac{1}{\delta}$$



Dimostro che la tesi vale in

$$[a + k\delta, a + (k+1)\delta] \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}$$

Uso di induzione

• $k=0$. Praticamente è la def. di B

$$f(x) \leq B \leq B + \underbrace{A(x-a)}_{\geq 0}$$

• $k \Rightarrow k+1$. Dato x prendo $x - \delta$ che sta nell'intervallo prec. e quindi

$$f(x) \leq f(x - \delta) + 1$$

$$\leq A(x - \delta - a) + B + 1$$

hp induttiva $\nearrow$

$$= \frac{1}{\delta} (x - \delta - a) + B + 1$$

$$= \frac{1}{\delta} (x - a) - \cancel{1} + B + \cancel{1}$$

$$= Ax + B$$

— o — o —

Esercizio. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$

U.C. in $[1, +\infty)$? NO! Cresce come $x^{3/2}$, quindi non sublineare

U.C. in $[-1, 1]$? SI! H-C

U.C. in $(-3, 3)$? SI! Lo è in $[-3, 3]$ ☺

$\frac{\sqrt{1+x^3}}{x}$ U.C. in $[1, +\infty)$? SI! $\rightarrow$ asintotica a $\sqrt{x}$
 $\rightarrow$ lipschitziana

FUNZIONI HÖLDERIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $a \in (0, 1]$.

Si dice che f è a -Hölderiana in A se esiste $H \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^a \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

↑ con $a=1$ è Lipschitz

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$ con $A = [0, +\infty)$

Dico che è $\frac{1}{2}$ -Hölder e più precisamente

$$|f(x) - f(y)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante } 1}}{|x - y|^{1/2}}$$

Dim $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$

wlog $x \geq y$, quindi $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$, cioè $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x - y}$

Essendo tutto ≥ 0 faccio i $\square$ e concludo.

Esempio 2 $f(x) = x^a$ è a -Hölderiana in $[0, +\infty)$ per ogni $a \in (0, 1]$.

Dim Devo dire che $x^a - y^a \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante } 1}}{(x - y)^a}$ per ogni $x \geq y \geq 0$

Penso y come parametro, e studio la funzione

$$\varphi(x) := (x - y)^a + y^a - x^a \quad \text{per } x \geq y$$

per $x = y$ viene $\varphi(y) = 0$, e inoltre

$$\varphi'(x) = a(x - y)^{a-1} - a x^{a-1} = a \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{più grande perché} \\ \text{denom. più piccolo.}}}{\frac{1}{(x - y)^{1-a}}} - \frac{1}{x^{1-a}} \right\} \geq 0$$

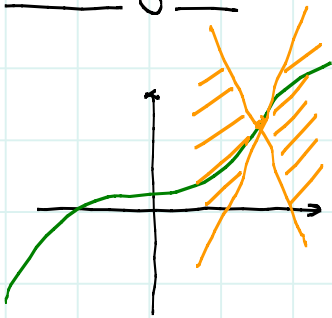
Oss. Le funzioni Hölder con $\alpha > 1$ sarebbero solo le costanti, almeno sugli insiemi convessi.

Dim La derivata sarebbe nulla ovunque!

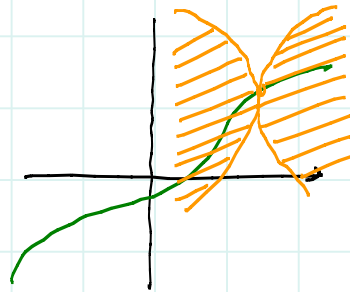
$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M \cdot |h|^\alpha}{h}$$

e se $\alpha > 1 \dots$

Idea geom.



Lip: il grafico sta sempre
dentro una "farfalla"
con pendenza $\pm L$



Hölder: farfalla
"a radice"