

COMPLETEZZA DEI REALI

SUCCESIONI DI CAUCHY

Def. Una successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice DI CAUCHY se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 \forall n \geq n_0 \quad |x_n - x_m| \leq \varepsilon$$

Brutalmente: definitivamente stanno tutti vicini-vicini

FATTO 1 Le successioni che hanno limite reale sono di Cauchy.

Dim Sia $x_n \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$.

Per def. di limite trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|x_n - x_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

Ma allora per ogni $n \geq n_0$ e ogni $m \geq n_0$ vale

$$|x_n - x_m| \leq \underbrace{|x_n - x_\infty|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} + \underbrace{|x_\infty - x_m|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} \leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon \quad \therefore$$

FATTO 2 Le succ. di Cauchy sono limitate.

Dim Defin. stanno tutti vicini-vicini e prima sono # finito

Uso def. di succ. di Cauchy con $\varepsilon = 2026$. Trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ e so che

$$|x_n - x_{n_0}| \leq 2026 \quad \forall n \geq n_0$$

$\uparrow$
 n

cioè $x_{n_0} - 2026 \leq x_n \leq x_{n_0} + 2026 \quad \forall n \geq n_0$

Ma allora (posso sempre supporre $n_0 \geq 1$)

$$x_n \leq \max \{x_{n_0} + 2026, x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}\}$$

e

$$x_n \geq \min \{x_{n_0} - 2026, x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1}\} \quad \text{!}$$

FATTO 3 Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una succ. di Cauchy

Supponiamo che esista una s.succ. convergente, diciamo

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$$

Allora

$$x_n \rightarrow x_\infty \quad (\text{tutta quanta tende allo stesso limite})$$

Dim Sono dei percorsi: se una s.succ. va a x_∞ , gli vanno dietro tutti.

$$\text{Devo dire che } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad |x_n - x_\infty| \leq \varepsilon.$$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$.

Essendo x_n di Cauchy

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_1 \forall m \geq n_1 \quad |x_n - x_m| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\text{Poiché } x_{n_k} \rightarrow x_\infty, \text{ avremo } |x_{n_k} - x_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall k \text{ abbastanza}$$

Allora posso

$$n_0 := \max \{n_1, n_{k_0}\} = n_{k_0}$$

e per ogni $n \geq n_0$ avrò che

grande, diciamo $k \geq k_0$
↑
a meno di prendere
un k più grande,
posso sempre
assumere $n_{k_0} \geq n_1$

$$|x_n - x_\infty| \leq |x_n - x_{\underset{\uparrow n}{n_{k_0}}}| + |x_{n_{k_0}} - x_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon}$$

Qui abbiamo usato
che $n_{k_0} \geq n_1$

Teorema (Viceversa del fatto 1).

Le succ. di Cauchy hanno per forza limite reale

DIM 1 Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ di Cauchy

→ Per il fatto 2 è limitata

→ Per Bolzano-Weierstrass esiste s.succ. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

→ Per il fatto 3 tutta $x_n \rightarrow x_\infty$.

DIM 2 → Per il fatto 2 è limitata

→ di sicuro esistono finiti il limsup L e il liminf l

→ Basta dimostrare che $L - l = 0$, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad L - l \leq \varepsilon$$

Essendo di Cauchy

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon \quad \text{per } n \text{ ed } m \geq n_0$$

e quindi prendendo $m = n_0$ ottengo

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq x_n \leq x_{n_0} + \varepsilon$$

Passando $n \rightarrow +\infty$ concludo

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq l \leq L \leq x_{n_0} + \varepsilon$$

da cui $L - l \leq 2\varepsilon$

$$\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$$



Teorema Sia a_n una succ. di reali. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

DIM 1 Via Carabiniere per serie ~ basata sull'ordinamento

DIM 2 Introduciamo le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\hat{S}_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$$

non lo stesso
per forza

Ipotesi: $\hat{S}_n$ ha limite reale

Tesi: S_n ha limite reale $\uparrow$

Basta dim. che S_m è di Cauchy.

Ossewo che, per $m > n$ vale che

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^m a_k$$

quindi

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

Finale: $\hat{S}_m$ ha limite, quindi $\hat{S}_m$ è di Cauchy, quindi $RHS \leq \varepsilon$ per n ed m grandi, quindi $LHS \leq \varepsilon$ per n ed m grandi, quindi S_n è di Cauchy, quindi S_n ha limite.

— o — o —

La completezza (cioè il fatto che le succ. di Cauchy convergono) è una proprietà che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$, ed è sostanzialmente equivalente all'assioma di continuità.

Proprietà archimedea dei reali $\forall r \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n > r$

FATTO Se in un campo ordinato valgono propr. archimedea + completezza, allora vale l'assioma di continuità

Idea Prendo A a sx di B e voglio un separatore

trovo per bisezione

Prendo $a \in A$ e $b \in B$. Prendo il pto

medio: o separa, o sta da una delle due parti

Procedo allo stesso modo e ottengo una succ. c_n tale che

$$|c_{n+1} - c_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$



Claim: questa è di Cauchy e converge ad un separatore vero.
Dove ho usato l'Archimedeo? Expert mode: serve davvero?