

LEMMA / ESERCIZIO Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto e $\neq \emptyset$.

Allora A ammette max e min.

Dim. Sia $L := \sup A$. Osservo che $L \in \mathbb{R}$ perché A è limitato.

Osservo che $L \in \text{Clos}(A)$ perché

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \text{ t.c. } L - \varepsilon \leq a \leq L \leq L + \varepsilon$$

Quindi $L \in A$.

Idem per il minimo.

Esercizio $A = (0, 1]$ è compatto? NO

Con def 1 Non è chiuso perché $0 \in \text{Clos}(A)$ ma $0 \notin A$

Con def 2 Prendo $a_n = \frac{1}{n}$. Ovviamente $a_n \in A$ per ogni $n \geq 1$,
ma non ha s.succ. che convergono ad elementi di A

Con def 3 Devo trovare un ricoprimento aperto che non ha
sottoricoprimenti finiti

Prendo $U_i := \left(\frac{1}{i}, 2026\right)$ con $i \in \mathbb{N}, i \geq 1$

È chiaro che $A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} U_i = (0, 2026)$

ma se uso solo un numero finito non riesco a ricoprire
tutti i numeri abbastanza piccoli.

Avrei potuto prendere $U_i = (i, 2026)$ con $i \in (0, 1)$
— 0 — 0 —

Teorema (Weierstrass) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua,

(ii) A è compatto.

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in A \} = \max f(A)$$

$$\min \{ f(x) : x \in A \} = \min f(A)$$

Dim Caso del max (l'altro è analogo)

Sia $S := \sup \{ f(x) : x \in A \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Per il lemma solito esiste una successione $\{y_n\} \subseteq f(A)$

tale che $y_n \rightarrow S$

Per definizione di immagine $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in A$.

Ora $\{x_n\} \subseteq A$, che è compatto, quindi

$$\exists x_{n_k} \rightarrow x_\infty.$$

Claim: x_∞ è un p.to di max. Infatti

$$f(x_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = S$$

$\uparrow$ f è cont. $\uparrow$ def. di x_n $\uparrow$ s. succ. $\uparrow$ proprietà degli y_n

Solo alla fine S suette di poter essere $+\infty$

— 0 — 0 —

Interpretazione Le funzioni continue mandano compatti per succ. in compatti per succ.

Detto meglio: se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $f(A)$ è compatto (tutto per succ.)

Dim Sia $\{y_n\} \subseteq f(A)$ e voglio trovare $y_{n_k} \rightarrow y_\infty \in f(A)$.

Scrivo $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in A$. Per cpt. di A trovo $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Allora $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua}}} f(x_\infty) =: y_\infty \in f(A)$

Weierstrass rivisto : A compatto + f continua

$\rightarrow f(A)$ compatto

$\Rightarrow f(A)$ ammette max/min

$\uparrow$
Lemma/esercizio

Oss. Le funzioni continue

$\rightarrow$ non mandano limitati in limitati

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad A = (0,1) \rightsquigarrow f(A) = (1, +\infty)$$

$\rightarrow$ non mandano chiusi in chiusi

$$f(x) = \arctan x \quad A = [0, +\infty) \rightsquigarrow f(A) = [0, \frac{\pi}{2})$$

FUNZIONI SEMICONTINUE Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$

Diciamo che f è semicontinua inferiormente (SCI) in x_0 se

$\rightarrow$ o x_0 è isolato in A

$\rightarrow$ o vale che

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

... superiormente (SCS) in x_0 se ...

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

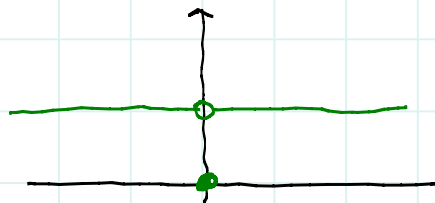
Oss. Quando sono vere entrambe

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

e quindi f è continua in x_0 .

Esempio 1

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

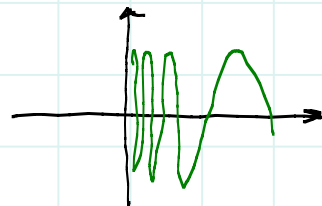


In $x=0$ è SCI

Morale: le SCI al limite possono solo crollare
le SCS " " " " crescere

Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x=0 \end{cases}$$



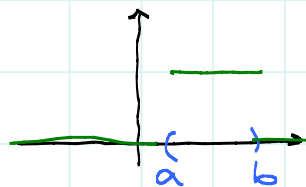
Questa è (in $x=0$)

→ SCI se $a \leq -1$

→ SCS se $a \geq 1$

Esempio 3 La funzione caratteristica di un insieme A , cioè

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$



risulta → SCI se A è aperto

→ SCS se A è chiuso.

Teorema Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f SCI in ogni p.to di A ,

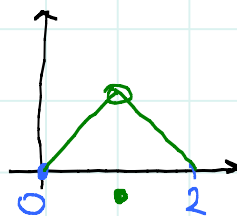
(ii) A compatto e $\neq \emptyset$.

Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in A \}$$

Oss. Non esiste nec. il max

$$A = [0, 2]$$



Dim Di sicuro esiste

$$I : \sup \{f(x) : x \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$
$$= \sup f(A)$$

Per il solito lemma

$$\exists \{y_n\} \subseteq f(A) \quad \text{t.c.} \quad y_n \rightarrow I$$

Per def. di immagine

$$\exists \{x_n\} \subseteq A \quad \text{t.c.} \quad y_n = f(x_n)$$

Per compattezza

$$\text{esiste } x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in A$$

Claim: x_∞ è p.to di min.

Infatti

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} \quad (\text{sottosucc.})$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) \quad (\text{def. di } y_n \text{ e } x_n)$$

$$\geq \liminf_{x \rightarrow x_\infty} f(x) \quad (\text{versione s.succ. della sci})$$

$$\geq f(x_\infty) \quad (\text{sci})$$

$$\geq I \quad (\text{perché } I = \sup)$$

quindi è finita

— o — o —