

TRE FACCE DELLA COMPATTEZZA Setting : $A \subseteq \mathbb{R}$

Def. 1 (Compattezza ingannevole) Si dice che A è COMPATTO se è limitato + chiuso

Def. 2 (Compattezza per successioni) Si dice che A è comp. per succ. se ogni successione $\{x_n\} \subseteq A$ ammette una s.succ. convergente, cioè esiste una succ. n_k crescente di interi pos, ed esiste $x_\infty \in A$ tale $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

Def. 3 (Comp. per ricoprimenti) Si dice che A è comp. per ricopr. se ogni ricoprimento aperto di A ammette un sottoricoprimento finito.

- ricoprimento aperto : famiglia $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti di $\mathbb{R}$ tali che

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

- sottoricoprimento finito : esiste $J \subseteq I$, con J finito, tale che

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$$

Esempi di famiglie di aperti

- ① $U_i = (i, i+2)$ $i \in \mathbb{N}$ ricoprono la semiretta $[1, +\infty)$ e anche la semiretta $(0, +\infty)$

In questi casi non esiste un s.ricopr. finito.

② Gli stessi di prima ricoprono anche $[5, 2026]$ e in questo caso ne basta un numero finito

③ $M_i = (i, i+2)$ $i \in \mathbb{R}$ famiglia più che numerabile.

Oss. La def. 3 si può dare anche considerando M_i come aperti in A (e non in $\mathbb{R}$). Basta considerare le intersezioni con A .

TEOREMA Le 3 nozioni di compattezza sono equivalenti **in $\mathbb{R}$** .

TEOREMA di BOLZANO-WEIERSTRASS

Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una succ. LIMITATA.

Allora x_n ammette una s.succ. convergente ad un numero reale.

L'ipotesi è $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M$

Dim 1 Sia $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Allora per forza $L \in [-M, M]$, quindi è reale.

Ma essendo $L = \max \lim x_n$, per forza esiste s.succ. $x_{n_k} \rightarrow L$.

Potrei farla uguale con il $\liminf$.

Dim 2 Considero questo insieme



$$A = \{a \in [-M, M] : a \leq x_n \text{ per infiniti indici } n\}$$

Chiaramente $A \neq \emptyset$ perché contiene almeno $-M$. Pongo

$$x_\infty := \sup A \quad (\text{è reale in } [-M, M])$$

Dico che esiste una s.succ. che converge a x_∞ .

Osservazione chiave: per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$x_\infty - \varepsilon \leq x_n \quad \text{per infiniti indici}$$

$$x_\infty + \varepsilon \geq x_n \quad \text{definitivamente (altrimenti avremmo che } x_\infty + \varepsilon \in A)$$

Ora scelgo x_{n_k} a caso e poi, supponendo di aver già scelto

$$x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$$

un gioco d'osservazione chiave con $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ e trovo di sicuro un indice $n_{k+1} > n_k$ tale che

$$x_\infty - \frac{1}{k+1} \leq x_{n_{k+1}} \leq x_\infty + \frac{1}{k+1}$$

Per i carabinieri $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

— 0 — 0 —

Oss. Nella dim 2 ho ridefinito il LIMSUP e ridimostrato che è pure maxlim.

Oss. Si poteva partire in tanti altri modi, ad esempio

$$A = \{a \in [-M, M] : x_n \leq a \text{ definitivamente}\}$$

$$x_\infty := \sup A$$

$$A = \{a \in [-M, M] : x_n \leq a \text{ per infiniti } n\}$$

$$x_\infty := \inf A$$

Corollario Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato e chiuso, allora è compatto per successioni [(1) $\Rightarrow$ (2) del teorema]

Dim Sia $\{x_n\} \subseteq A$ una succ.

Poiché A è limitato, $\{x_n\}$ è limitata, quindi per BW esiste

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$$

Ci serve che $x_\infty \in A$. Qui entra in gioco che A è chiuso.

Basta osservare che $x_\infty \in \text{Clos}(A) = A$ perché ogni intervallo $(x_\infty - 2, x_\infty + 2)$ interseca A (contiene x_{n_k} per k grande).

Dim (2) $\Rightarrow$ (1) nel teorema Dico dim. che A è limitato + chiuso.

Limitato Supponiamo che non lo sia (per esempio $\sup A = +\infty$, il caso $\inf A = -\infty$ è analogo).

$\sup A = +\infty$ vuol dire che

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \geq M$$

Me la gioco con $M = n$ e trovo $x_n \in A$ t.c. $x_n \geq n$

Questa succ. tende a $+\infty$ e quindi non può avere s.succ. conv.

Chiuso Supponiamo che non lo sia. Vuol dire che esiste

$$x_\infty \in \text{Clos}(A) \quad \text{t.c.} \quad x_\infty \notin A$$

$$\uparrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (x_\infty - \varepsilon, x_\infty + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e trovo $x_n \in A$ t.c.

$$x_\infty - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_\infty + \frac{1}{n}$$

Questa succ. $\{x_n\}$ converge a x_∞ , quindi fatte le sue s.succ. continuano a convergere a x_∞ , che però non sta in A .

— o — o —

LEMMA Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, e sia $L := \sup A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Allora esiste una successione $\{a_n\} \subseteq A$ t.c. $a_n \rightarrow L$.

Dim (Solita roba)

Se $L = +\infty$, ragiono come sopra

... per ogni n trovo $a_n \in A$ t.c. $a_n \geq n$... $a_n \rightarrow +\infty$

Se $L \in \mathbb{R}$, allora

$$a \leq L \quad \forall a \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a \geq L - \varepsilon$$

Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e trovo $a_n \in A$ t.c. $L - \frac{1}{n} \leq a_n \leq L$.

Per i Carabiniere $a_n \rightarrow L$.

Oss. Discorso analogo vale per l'inf.

— o — o —