

De L'Hôpital (caso $\frac{0}{0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $f: (x_0, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (x_0, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f e g sono continue e derivabili in (x_0, x_0+r) (senza estremi)

(ii) si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0 \quad (\text{quindi è } \frac{0}{0})$$

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0+r)$.

Allora

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0+r)$$

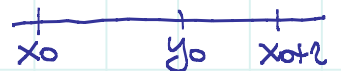
e vale la solita cosa a quattro

$$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In particolare se $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ha limite, allora anche $\frac{f(x)}{g(x)}$ ha lo stesso limite.

Dim che $g(x) \neq 0$ Estendo g a $[x_0, x_0+r)$ ponendo

$$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (x_0, x_0+r) \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$



Osservo che $\hat{g}: [x_0, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Supponiamo che esista $y_0 \in (x_0, x_0+r)$ t.c. $g(y_0) = 0$.

Allora $\hat{g}$ verifica le ipotesi di Rolle in $[x_0, y_0]$. [Verificare!]

Ma allora esiste $c \in (x_0, y_0)$ t.c. $\hat{g}'(c) = 0$. Ma $\hat{g}'(c) = g'(c)$ e questo è contro l'ipotesi.

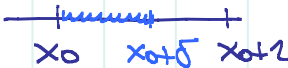
Dim cosa a 4 L è centrale è banale.

Dimostriamo quella a dx (l'altra è simmetrica)

Se $\limsup a dx$ è $+\infty$, allora è banale.

Facciamo il caso in cui è un certo $L \in \mathbb{R}$ (se $L = -\infty$ ne parliamo dopo).

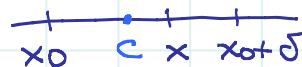
Per caratterizzazione di $\limsup$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in (0, \varepsilon)$ tale che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$


Ora considero le estensioni $\hat{f}$ e $\hat{g}$ definite come sopra e ho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

Cauchy
in $[x_0, x]$



per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Facciamo il $\limsup$

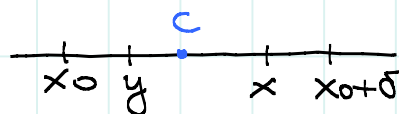
$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

Dal momento che è vero $\forall \varepsilon > 0$ ho concluso che $\limsup \frac{f(x)}{g(x)} \leq L$.

— 0 — 0 —

Oss. Se uno qui non vuole estendere, scrive

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$



per ogni $x_0 < y < x < x_0 + \delta$

Mandando $y \rightarrow x_0^+$ ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Oss. Se il $\limsup$ a dx è $-\infty$, allora

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta \in (0, 1) \text{ t.c. } \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq M \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Da qui come prima si arriva a $\limsup \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$

ed essendo vero per ogni $M \dots$
— o — o —

De L'Hôpital (caso $\frac{*}{\infty}$, con $x \rightarrow x_0^+$)

Setting come prima. Supponiamo che

(i) f e g continue e derivabili in $(x_0, x_0 + 2)$,

(ii) vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty \quad (\text{basta le deu.})$$

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + 2)$.

Allora (è gratis che $g(x) > 0$ almeno vicino a x_0 visto che tende a $+\infty$, quindi posso dividere e)

vale la solita cosa a 4.

Dim Come prima supponiamo $\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$.

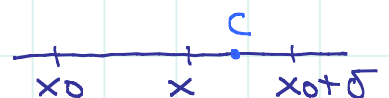
Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e trovo $\delta \in (0, 2)$ t.c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Allora [ricordarsi di aggiungere e togliere solo sopra]

per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ abbiamo che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0 + \delta) + f(x_0 + \delta)}{g(x)}$$



Ora
$$\frac{f(x) - f(x_0 + \delta)}{g(x) - g(x_0 + \delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

da cui $f(x) - f(x_0 + \delta) \leq (L + \varepsilon)(g(x) - g(x_0 + \delta))$

(posso moltiplicare perché denom > 0 almeno per x abbastanza vicini a x_0). Quindi per questi x vale che

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0 + \delta) + f(x_0 + \delta)}{g(x)} \leq \frac{(L + \varepsilon)(g(x) - g(x_0 + \delta)) + f(x_0 + \delta)}{g(x)} \\ &= L + \varepsilon + \boxed{\frac{-(L + \varepsilon)g(x_0 + \delta) + f(x_0 + \delta)}{g(x)}} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0 \text{ quando } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Facendo il limsup a dx e sx ottengo

$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

ed essendo ε arbitrario...

— o — o —

Oss. 1 Quando $x \rightarrow +\infty$ si pone $x = \frac{1}{t}$ e ci si riduce a $t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Oss 2 Se nel caso $\frac{0}{0}$ si assume che f e g siano definite e derivabili anche in x_0 , allora la dim. diventa banale

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \cdot \boxed{\frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}}$$

$\downarrow$ $f'(x_0)$ $\downarrow$ $\frac{1}{g'(x_0)}$

— o — o —