

Esercizio 1

$$u'' + \lambda u = 0$$

Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ succede che tutte le sol. sono limitate.

$x^2 + \lambda = 0$ tutto dipende dal segno di λ

$$\boxed{\lambda < 0} \quad x^2 = -\lambda \leadsto \text{due sol. reali } x = \pm \sqrt{-\lambda}$$

$$u(t) = a e^{\sqrt{-\lambda} t} + b e^{-\sqrt{-\lambda} t}$$

Se a oppure b sono $\neq 0$, allora $u(t)$ non è limitata per $t \rightarrow +\infty$ oppure $t \rightarrow -\infty$. L'unica possibilità è $a = b = 0$.

$$\boxed{\lambda > 0} \quad x = \pm \sqrt{\lambda} i \quad \text{complesse coniugate}$$

$$u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t) \quad \text{sempre limitate}$$

la soluzione si può sempre scrivere come $u(t) = A \sin(\sqrt{\lambda} t + \varphi)$
↑ ↑
 ampiezza fase

$$u(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cos(\dots) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \sin(\dots) \right\}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\sqrt{\lambda} t + \varphi)$$

$$\boxed{\lambda = 0} \quad x^2 = 0 \leadsto x = 0 \text{ di mult.} = 2$$

$$u(t) = a + bt$$

Le uniche sol. limitate sono le costanti

Esercizio 2 (TACOMA - ALTALENA)

$$\ddot{u} + 16u = \sin(\alpha t)$$

Domanda: le soluzioni sono limitate?

Parte omogenea: $u(t) = a \cos(4t) + b \sin(4t)$

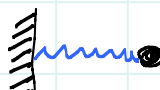
Sol. speciale: la cerco del tipo $\bar{u}(t) = c \sin(\alpha t) + d \cos(\alpha t)$
purché $\alpha \neq 4$

Se $\alpha \neq 4$, la soluzione sarà qualcosa di limitato

Se $\alpha = 4$, la sol. la cerco $\bar{u}(t) = t(c \sin(4t) + d \cos(4t))$
 $= t A \sin(4t + \varphi)$

e questa non è limitata.

Quindi per $\alpha = 4$ NON ci sono soluzioni limitate.

Parentesi "fisica" $\ddot{u} + 16u = 0 \rightsquigarrow \ddot{u} = -16u$ 

Oscillatore armonico.

Morale: se il termine forzante ha la stessa frequenza dell'oscillatore non forzato, allora le soluzioni diventano NON limitate.

RISONANZA

Esercizio 3 (MORE IS LESS)

$$\ddot{u} + 16u + \alpha \dot{u} = 0$$

$$\alpha > 0$$

$$\ddot{u} = -16u - \underbrace{\alpha \dot{u}}_{\uparrow \text{attrito}}$$

Idea fisica: le soluzioni tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$ per colpa dell'attrito.

Domanda: se voglio che TUTTE le sol. tendano a 0 molto velocemente, che α devo usare.

Pd. caract. $x^2 + \alpha x + 16 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 64}}{2}$

Tre scenari a seconda di $\alpha^2 - 64$

$\alpha^2 - 64 < 0$ radici $x = -\frac{\alpha}{2} \pm \beta i$

$$u(t) = a e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\beta t) + b e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\beta t)$$

Le soluzioni tendono a 0 come $e^{-\frac{\alpha}{2}t}$. Questo vale per $\alpha < 8$

$\alpha^2 - 64 > 0$ Ora le radici sono $-\lambda$ e $-\mu$ reali (sono neg. perché prod. + e somma -)

$$u(t) = a e^{-\lambda t} + b e^{-\mu t}$$

Il decadimento di $u(t)$ dipende dal MINORE tra λ e μ .

Visto che la somma è α , il minore è più piccolo di $\frac{\alpha}{2}$, quindi è MENO di prima.

$\alpha = 8$ $x = -4$ di mult. 2 $\rightsquigarrow u(t) = a e^{-4t} + b t e^{-4t}$
 $\uparrow$ decad. peggiore

Conclusione: il decadimento migliore si ha per $\alpha = 8$, ed è del tipo

$$te^{-4t}$$

Esercizio 4

$$\begin{cases} u' - 5u = \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

Per quali α la sol. è limitata per $t \geq 0$?

Fattore integrante: e^{-5t}

$$u' e^{-5t} - 5u e^{-5t} = e^{-5t} \cdot \arctan t$$

$$(u e^{-5t})' = e^{-5t} \cdot \arctan t$$

$$u(t) = \underbrace{c}_{\alpha} e^{5t} + e^{5t} \int_0^t e^{-5s} \cdot \arctan s \, ds \quad (\text{Formula per la soluzione})$$

$$= \left\{ \alpha + \int_0^t e^{-5s} \cdot \arctan s \, ds \right\} e^{5t}$$

Cosa succede per $t \rightarrow +\infty$? Ovviamente $e^{5t} \rightarrow +\infty$ e l'integrale diventa improprio convergente ad un certo $I \in \mathbb{R}$

- Se $\alpha + I > 0$, allora $u(t) \rightarrow +\infty$
- Se $\alpha + I < 0$, allora $u(t) \rightarrow -\infty$
- Se $\alpha + I = 0$, allora α la giocauro e devo fare il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha + \int_0^t \dots}{e^{-5t}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ [0, \text{Hop}]}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-5t} \cdot \arctan t}{-5e^{-5t}} = -\frac{\pi}{10}$$