

Eq. Diff. Lineari coeff. costanti non omogenee . Tentativi ragionevoli

$$Lu = f(t)$$

$$f(t)$$

$$e^{\alpha t}$$

$$\bar{u}(t)$$

$$a e^{\alpha t}$$

$$\sin(\alpha t)$$

$$\cos(\alpha t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha t) \\ \cos(\alpha t) \end{array} \right\} a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)$$

pol. $p(t)$ grado k

$$p(t) e^{\alpha t}$$

polinomio COMPLETO dello stesso grado

$$q(t) e^{\alpha t}$$

↑ pol. completo con stesso grado

$$p(t) \sin(\alpha t)$$

$$p(t) \cos(\alpha t)$$

$$\left. \begin{array}{l} p(t) \sin(\alpha t) \\ p(t) \cos(\alpha t) \end{array} \right\}$$

$$q(t) (a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t))$$

$$q_1(t) \sin(\alpha t) + q_2(t) \cos(\alpha t)$$

↑ pol. completi dello stesso grado

$$\sin^7(\alpha t)$$

↪ si scrive come comb. lineare di

$\sin$ e $\cos$ senza esponenti (precorso)

Fatto generale: ogni prodotto di funzioni trigonometriche diventa una somma (product $\rightarrow$ sum)

Se $f(t)$ è già sol. dell'omogenea, si cambia il tentativo mettendo delle t finché basta.

Esempio 1

$$u' + 3u = 5$$

↪ variabili separabili

↪ lin. coeff. cost.

↪ lin. 1° ordine

Provarli tutti e vedere cosa succede

$$u(t) = \underbrace{c \cdot e^{-3t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{parte} \\ \text{omog.}}} + \frac{5}{3} \quad \uparrow \bar{u}(t)$$

Esempio 2 $u'(t) + \underbrace{\sin t}_{a(t)} \cdot u(t) = \underbrace{\sin(2t)}_{b(t)}$

Seguiamo il proced. del FATTORE INTEGRANTE

$A(t) = -\cos t$ Fatt. int. : $e^{-\cos t}$

$$u' e^{-\cos t} + u \sin t \cdot e^{-\cos t} = \sin(2t) e^{-\cos t}$$

$$= (u e^{-\cos t})' = \sin(2t) e^{-\cos t}$$

$$u(t) e^{-\cos t} = \int \sin(2t) e^{-\cos t} dt = 2 \int \sin t \cdot \cos t \cdot e^{-\cos t} dt$$

pongo $s = \cos t$
 $ds = -\sin t \cdot dt$

$$= -2 \int s e^{-s} ds = -2 [-s e^{-s} + \int e^{-s} ds]$$

$$= 2s e^{-s} + 2e^{-s} = 2(\cos t + 1) e^{-\cos t} + c$$

Verifica ok!

Conclusione

$u(t) = c e^{\cos t} + 2\cos t + 2$

← Verifica

Esempio 3 $u'(t) + t u(t) = t^3$

1° modo Fattore integrante: $A(t) = \frac{t^2}{2}$ $e^{A(t)} = e^{\frac{t^2}{2}}$

$$e^{\frac{t^2}{2}} \cdot u' + t e^{\frac{t^2}{2}} u = t^3 e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$[e^{\frac{t^2}{2}} u]' = t^3 e^{\frac{t^2}{2}} = t \cdot t^2 e^{\frac{t^2}{2}}$$

pongo $s = \frac{t^2}{2}$ e si integra

2° modo Omogenea + tentativo. Omogenea $\sim c e^{-\frac{t^2}{2}}$
 $u' = -t u$

Tentativo: $\bar{u}(t) = at^2 + bt + c$

$\bar{u}'(t) = 2at + b$

$$\bar{u}'(t) + t\bar{u}(t) = 2at + b + at^3 + bt^2 + ct = t^3$$

$\leadsto a=1 \leadsto b=0 \leadsto c=-2a=-2$

$$\leadsto u(t) = t^2 - 2 + ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Esempio 3 bis $u'(t) + tu(t) = t^2$

Provo $\bar{u}(t) = at + b \leadsto a + at^2 + bt = t^2 \quad \therefore$

Morale: con le potenze dispari funziona, con quelle pari no

Esempio 4 $u'(t) + \frac{u(t)}{t+1} = t^3$

$a(t) = \frac{1}{t+1} \leadsto A(t) = \log|t+1| \leadsto e^{A(t)} = t+1$

$\therefore \leadsto$ posso da subito moltiplicare per $t+1$!!

$$(t+1)u'(t) + u(t) = t^3(t+1) \\ = [(t+1)u(t)]'$$

$$(t+1)u(t) = \int t^3(t+1)dt + c = \int (t^4 + t^3)dt + c \\ = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + c$$

$$u(t) = \frac{c}{t+1} + \frac{1}{t+1} \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 \right)$$

Questa è definita per $t > -1$ o per $t < -1$ a seconda del t_0 iniziale

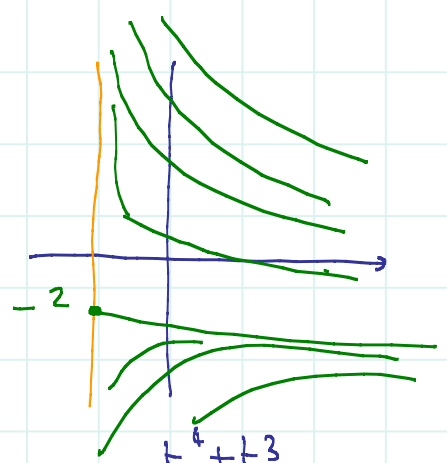
Come si comporta quando $t \rightarrow -1^+$?

Dipende da c !

- Se $c + \frac{1}{20} > 0$, allora $\rightarrow +\infty$
- Se $c + \frac{1}{20} < 0$, allora $\rightarrow -\infty$
- Se $c = -\frac{1}{20}$, allora

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{-\frac{1}{20} + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4}{t+1} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{t^4 + t^3}{1} = -2$$

↑
in realtà 0
[Corretto dopo video]



Esempio 5 $\dot{u} = \frac{7u}{t}$ $u(1) = 3$

Variabili separabili $\frac{du}{u} = \frac{7}{t} dt \Rightarrow \log |u| = 7 \log |t| + c$

$$\Rightarrow u(t) = k \cdot t^7 \quad (\text{verifica}) \quad \Rightarrow \boxed{u(t) = 3 t^7}$$

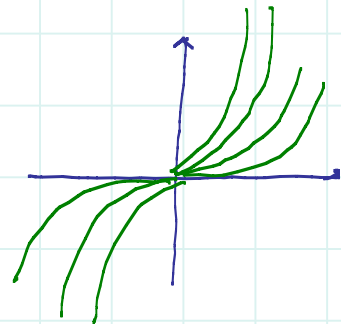
Int. massima di esistenza ? $(0, +\infty)$

Se scrivo l'eq. come $t u'(t) = 7u(t)$?

Non è in forma normale, quindi comunque qualcosa va storto

$$u(t) = \begin{cases} 3t^7 & \text{per } t \geq 0 \\ 8t^7 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

è una sol. di classe C^0 dell'eq.



— 0 — 0 —