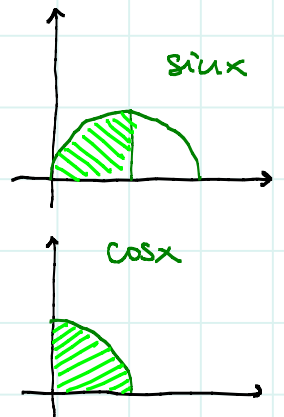


UTILIZZO DELLE SIMMETRIE

Esempio 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$



Come evidenza la simmetria: nel 2° integrale

pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$ $x = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow dx = -dy$

Quando $x = 0$ ho che $y = \frac{\pi}{2}$

" $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$

Quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \quad \therefore$$

FATTO GENERALE

$$\int_k^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \sin x \, dx = \pm 1$$

$$\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \cos x \, dx = \pm 1$$

a seconda di k

Esempio 2 $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(|x|) \, dx = 4$$

↑
funzione pari



$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = -1 \quad \text{sfruttando il fatto generale}$$

Esempio 3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

1° modo: faccio la primitiva (per parti o sfruttando $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$)

2° modo: pongo $C := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ $S := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

Con il cambio $x = \frac{\pi}{2} - y$ si dimostra come nell'esempio 1 che $C = S$. D'altra parte

$$C + S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

↑
lung. interv.

Quindi $C = S = \frac{\pi}{4}$.

FATTO GENERALE

$$\int_a^b \cos^2 x \, dx = \int_a^b \sin^2 x \, dx = \frac{b-a}{2}$$

SE a e b sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$

↑ ↑
serve per avere la
simmetria

Esempio 4 $\int_0^{\pi} \sin^2(2025x) \, dx$

Pongo $y = 2025x \rightsquigarrow dx = \frac{1}{2025} dy$

$x=0 \rightsquigarrow y=0$, $x=\pi \rightsquigarrow y=2025\pi$. Quindi

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2025x) \, dx = \int_0^{2025\pi} \sin^2 y \cdot \frac{1}{2025} dy = \frac{1}{2025} \underbrace{\int_0^{2025\pi} \sin^2 y \, dy}_{\frac{2025\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Stessa cosa se al posto di 2025 c'è $\frac{k}{2}$ con k intero.

Esempio 5 (truccoso)

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 x}{5^x + 1} dx$$

La primitiva mette male ☹️

Pongo $x = -y$ da cui $dx = -dy$

$$\underbrace{\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 x}{5^x + 1} dx}_A = \int_{5\pi}^{-5\pi} \frac{\cos^5(-y)}{5^{-y} + 1} (-dy) = \underbrace{\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 y}{5^{-y} + 1} dy}_B$$

$$A + B = \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos^5 x \underbrace{\left\{ \frac{1}{5^x + 1} + \frac{1}{5^{-x} + 1} \right\}}_{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 1} dx = \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos^5 x dx$$

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 1 \quad \ddot{\smile}$$

$$= \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos x (1 - \sin^2 x)^2 dx \underset{\substack{\uparrow \\ \sin x = t \\ dt = \cos x dx}}{=} \int_0^0 (1 - t^2)^2 dt = 0$$

FATTI GENERALI

Se $f(x)$ è pari, allora
$$\int_{-A}^0 f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$$

" dispari, "
$$\int_{-A}^0 f(x) dx = - \int_0^A f(x) dx$$

Si dimostrano con la sostituzione $y = -x$, il che però richiede un minimo di ipotesi su f .

In alternativa, possiamo suonare la def. di integrale e ottenere

$$I^+(f, [0, A]) = I^+(f, [-A, 0]) \quad \text{e} \quad I^-(f, [0, A]) = I^-(f, [-A, 0])$$

se f è pari

Per f dispari:

$$I^+(f, [0, A]) = -I^-(f, [-A, 0]) \quad \text{e} \quad I^-(f, [0, A]) = -I^+(f, [-A, 0])$$

... caso f pari ... prendo $\psi(x)$ s.f. con $\psi(x) \geq f(x)$ in $[0, A]$.

Allora $\psi(-x)$ è s.f. con $\psi(-x) \geq f(x)$ in $[-A, 0]$ e

l'integrale in $[0, A]$ di $\psi(x)$ coincide con l'integrale in $[-A, 0]$ di $\psi(-x)$.

Esempio 6 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

1° modo: formule parametriche

2° modo: $\frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \text{dato} &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx}_{\substack{\uparrow \text{ con la sostituzione} \\ \cos x = y \text{ diventa} \\ \pm \int \frac{dy}{y^2}}} \\ &= \tan x - \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\text{verifica}} \end{aligned}$$

Esempio 7 $\int \sin(\log x) dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow x = e^y \rightsquigarrow dx = e^y dy$

$$\int \sin(\log x) dx = \int e^y \sin(y) dy = \dots \text{ grande ritorno}$$

Esempio 8 $\int \arcsin x dx$

1° modo $\int 1 \cdot \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

2° modo $x = \sin y \leadsto dx = \cos y dy$

$$\int \arcsin x dx = \int \arcsin(\sin y) \cdot \cos y dy = \int y \cos y dy = \dots \text{ parti}$$

Esempio 9 $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

1° modo : parametriche

2° modo : precorso $\int \frac{8}{\sin^3(2x)} dx \dots y = 2x \leadsto dy = 2dx$

$$\int \frac{4}{\sin^3 y} dy = 4 \int \frac{\sin y}{(1 - \cos^2 y)^2} dy \dots t = \cos y$$

3° modo : $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{\sin^3 x \cos x} + \frac{1}{\sin x \cos^3 x}$

$$\int \frac{\sin x}{\sin^4 x \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2 \cos x} dx \quad \cos x = t \dots$$

4° modo $\frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{\sin x \cdot \cos x}$

$$2 \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

☺

— o — o —