

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Ripartiamo dalla base di tutto

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Poniamo $\Phi(x) = F(G(x))$ (estremamente impreciso: dovrai mettere ipotesi su F e G)

Osserviamo che

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = f(G(x)) \cdot g(x) \quad (\text{solito } F' = f, G' = g)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_a^b f(G(x)) \cdot g(x) dx &= F(G(b)) - F(G(a)) \\ &= \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Formula int. per sostituzione SEMI-UFFICIALE

OSS. Se uno guarda LHS e RHS non sembrano esserci ipotesi su f , nemmeno la continuità.

Interpretazione BRUTAL MODE

→ Devo calcolare $\int_a^b f(G(x)) g(x) dx$

→ Pongo $y = G(x)$

→ Quando $x = a \rightsquigarrow y = G(a)$, quando $x = b \rightsquigarrow y = G(b)$

→ $\frac{dy}{dx} = G'(x) = g(x) \rightsquigarrow dy = g(x) dx$

In questo modo

$$\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

che è la formula ottenuta sopra rigorosamente.

Esempio 1 $\int x^8 \cdot \sin(x^9) dx$

Idea: pongo $y = x^9 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = 9x^8 \rightsquigarrow dy = 9x^8 dx$

$$\frac{1}{9} \int \underbrace{\sin(x^9)}_{\sin y} \cdot \underbrace{9x^8 dx}_{dy} = \frac{1}{9} \int \sin y dy = -\frac{1}{9} \cos y = -\frac{1}{9} \cos(x^9)$$

↑
verifica :)

Esempio 2 $\int x \cdot e^{-x^2} dx$

Pongo $y = x^2 \rightsquigarrow dy = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{e^{-x^2}}_{e^{-y}} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Esempio 3 $\int \frac{\log x}{x} dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \rightsquigarrow dy = \frac{dx}{x}$

$$\int \log x \cdot \frac{1}{x} dx = \int y dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \log^2 x$$

Esempio 4 $\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\log x}_{G} dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_F \underbrace{\log x}_G - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_g dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2$$

Si poteva fare per sostituzione?

$$y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx \quad \text{quindi}$$

$$\int x \log x \, dx = \int \underbrace{x^2}_{e^{2y}} \cdot \underbrace{\log x}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int y e^{2y} dy$$

da qui procedo per parti

Esempio 5 $\int \tan x \, dx$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \text{Pongo } y = \cos x \rightsquigarrow dy = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int \frac{1}{y} dy$$
$$= - \log |y| = - \log |\cos x|$$

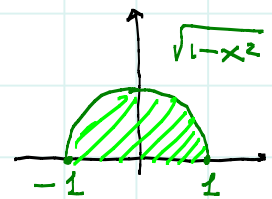
o volendo

$$\int \tan x \, dx = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Entrambe le funzioni sono definite per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\cos x \neq 0$)

Esempio 6 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$

↑
metà dell'area del
cerchio



Facciamo comunque UNA primitiva

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad \text{Pongo } x = \sin y \rightsquigarrow dx = \cos y \, dy$$

quindi

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \, dy = \int \cos^2 y \, dy$$

Ora quest'ultimo lo facciamo con il grande ritorno:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 y \, dy &= \int \underbrace{\cos y}_{\neq} \cdot \underbrace{\cos y}_{G} \, dy = \underbrace{\sin y}_{F} \underbrace{\cos y}_{G} - \int \underbrace{\sin y}_{F} \underbrace{(-\sin y)}_{g} \, dy \\ &= \sin y \cos y + \int \underbrace{\sin^2 y}_{1 - \cos^2 y} \, dy = \sin y \cos y + y - \int \cos^2 y \, dy\end{aligned}$$

↑
grande ritorno

da cui

$$\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} \sin y \cos y + \frac{1}{2} y$$

Tornando in x :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} x \underbrace{\cos(\arcsin x)}_{=} + \frac{1}{2} \arcsin x \\ &\quad \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$$

Una verifica è il condono di tutti i passaggi "strani" fatti.

PRIMITIVE DI POTENZE DI $\sin x$ E $\cos x$

1° modo Con il grande ritorno il grado scende di due

$$\begin{aligned}\int \cos^{2025} x \, dx &= \int \underbrace{\cos x}_{\neq} \cdot \underbrace{(\cos x)^{2024}}_G \, dx \\ &= \sin x \cdot (\cos x)^{2024} - \int \sin x \cdot 2024 (\cos x)^{2023} (-\sin x) \, dx \\ &= \sin x (\cos x)^{2024} + 2024 \int (\cos x)^{2023} (1 - \cos^2 x) \, dx\end{aligned}$$

grande ritorno

2° modo Formule PRECORSISTICHE : ogni prodotto di funzioni trigonometriche diventa una somma

$$\text{Ad esempio : } \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \rightsquigarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\rightsquigarrow \int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) \\ = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x$$

All'ora precedente

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx \\ = \frac{1}{2} \int \cos x \, dx + \frac{1}{2} \int \underbrace{\cos x \cdot \cos(2x)}_{\rightarrow \text{product to sum}} dx$$

3° modo Ottimo per esponenti DISPARI (anche negativi)
Per sostituzione

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

$$\text{Pongo } y = \sin x \rightsquigarrow dy = \cos x \, dx \quad \therefore \quad = \int (1 - y^2) dy$$

$$= y - \frac{1}{3} y^3 = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \quad \text{controllare che venga lo stesso in tutti i modi}$$

$$\text{Esempio finale} \quad \int \frac{x}{1+x^4} dx \quad \int \frac{x^2}{1+x^4} dx \quad \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

$$\text{BANALE: } \int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \log(1+x^4) \quad (\text{sostituzione } y=1+x^4)$$

$$\text{FACILE: } \int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \arctan(x^2) \quad (\text{sostituzione } y=x^2)$$

— 0 — 0 —