

Domanda: data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, come trovo $\overset{\text{UNA primitiva}}{F}: D \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$

Tecniche di integrazione:

- primitive elementari (tabella di derivate al contrario)
- int. per parti
- int. per sostituzione
- int. funzioni razionali
- sostituzioni razionalizzanti.

Base di tutto: se $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 e $\varphi = \Phi'$, allora

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Siano $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Definiamo

$$\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$$

Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) \quad \text{deriv. prodotto}$$

Applicando la base di tutto

$$\int_a^b (f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b$$

e quindi, riorganizzando,

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx$$

Formula di int. per parti UFFICIALE

Più brevemente

$$\int f' G = F G - \int F g$$

Formula int. per parti
ABUSIVA

Operativamente: $\rightarrow$ cerco di vedere la f da integrare come prodotto di due funzioni f e G
 $\rightarrow$ di f devo saper fare la primitiva
 $\rightarrow$ di G spero che derivando migliori.

Esempio 1

$$\int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{e^{2x}} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\frac{1}{2} e^{2x}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \rightarrow \text{fare sempre la verifica}$$

Esempio 2

$$\int \underset{G}{x^2} \cos(\underset{f}{3x}) dx = \underset{G}{x^2} \underset{f}{\frac{1}{3} \sin(3x)} - \int \underset{g}{2x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{3} \sin(3x)} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{2}{3} \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\sin(3x)} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{2}{3} \left\{ \underset{G}{x} \left(\underset{F}{-\frac{1}{3} \cos(3x)} \right) - \int \underset{g}{1} \left(\underset{F}{-\frac{1}{3} \cos(3x)} \right) dx \right.$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) + \frac{2}{9} x \cos(3x) - \frac{2}{9} \int \cos(3x) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) + \frac{2}{9} x \cos(3x) - \frac{2}{27} \sin(3x) \leftarrow \text{verifica}$$

FATTO GENERALE Così si fanno le primitive del tipo

$$\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx$$

$$\int p(x) \cos(\alpha x) dx$$

$$\int p(x) \sin(\alpha x) dx$$

con $p(x)$ polinomio

Utilizzi SMART dell'integrazione per parti:

→ grande ritorno

→ l'1 nascosto

Esempio 3 $\int \underset{\text{F}}{\cos x} \cdot \underset{\text{G}}{e^{2x}} dx = \underset{\text{F}}{\sin x} \cdot \underset{\text{G}}{e^{2x}} - \int \underset{\text{F}}{\sin x} \cdot \underset{\text{g}}{2e^{2x}} dx$

$$= \sin x \cdot e^{2x} - 2 \int \underset{\text{F}}{\sin x} \cdot \underset{\text{G}}{e^{2x}} dx$$

$\text{F} \quad \text{g} \rightarrow \text{torso uoletto :)$

$$= \sin x \cdot e^{2x} - 2 \left\{ \underset{\text{F}}{-\cos x} \cdot \underset{\text{G}}{e^{2x}} - \int \underset{\text{F}}{(-\cos x)} \cdot \underset{\text{g}}{2e^{2x}} dx \right\}$$

$$= \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x} - 4 \int \cos x \cdot e^{2x} dx$$

grande ritorno!

Portando a sx il ritornato, troviamo

$$5 \int \cos x \cdot e^{2x} dx = \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x}$$

Dividendo per 5 ho la primitiva voluta!

Esempio 4 $\int \cos^3 x dx$

$$\int \cos^3 x dx = \int \underset{\text{F}}{\cos x} \cdot \underset{\text{G}}{\cos^2 x} dx = \underset{\text{F}}{\sin x} \cdot \underset{\text{G}}{\cos^2 x} - \int \underset{\text{F}}{\sin x} \cdot \underset{\text{g}}{2 \cos x (-\sin x)} dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \cdot \sin^2 x dx$$

$\text{"} 1 - \cos^2 x$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x dx - 2 \int \cos^3 x dx$$

→ grande ritorno!

Portando a sx:

$$3 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x$$

e dividendolo per 3 ho finito.

Esempio 5 $\int \log x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log x} \, dx = \underset{f}{x} \underset{G}{\log x} - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x \quad \leftarrow \text{verifica} \end{aligned}$$

Esempio 6 $\int \arctan x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} \, dx &= \underset{f}{x} \cdot \underset{G}{\arctan x} - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx \\ &= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \quad \leftarrow \text{verifica!} \end{aligned}$$

FATTO GENERALE Le funzioni $\log$ e $\arctan$ tendono a "migliorare" quando si derivano.

FATTO GENERALE Come l'esempio 3 si fanno le primitive di

$$\int \cos(ax) \cdot e^{bx} \, dx$$

$$\int \sin(ax) \cdot e^{bx} \, dx$$

(se la base è diversa da e non cambia nulla)

IL NON ESEMPIO

$$\int \tan x \, dx$$

$$\int \tan x \, dx = \int \underbrace{\sin x}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_g \, dx$$

$$= \underbrace{-\cos x}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_G - \int \underbrace{(-\cos x)}_F \left(\underbrace{-\frac{1}{\cos^2 x}}_g \right) (-\sin x) \, dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \tan x \, dx$$

Periamo ritorno!

Semplificando viene $0 = -1 \quad \ddot{}$

Oss. Questo succede quando si usano le formule abusive.
Con gli estremi verrebbe

$$[0]_a^b = [-1]_a^b \quad \text{che è vera } \ddot{}$$

Esempio ancora più evidente:

$$\int 1 \, dx = \int \underbrace{e^x}_f \cdot \underbrace{e^{-x}}_g \, dx = \underbrace{e^x}_F \cdot \underbrace{e^{-x}}_G - \int \underbrace{e^x}_F \left(\underbrace{-e^{-x}}_g \right) \, dx$$

$$= 1 + \int 1 \, dx$$

— 0 — 0 —