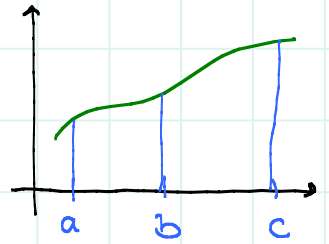


Additività rispetto alla zona di integrazione

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



Siano $a < b < c$ e sia $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

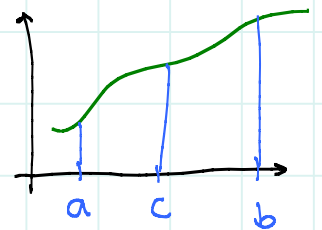
Supponiamo che f sia integrabile in $[a, b]$ e in $[b, c]$.

Allora f è integrabile in $[a, c]$ e vale la formula di sopra.

Oss. Un enunciato analogo vale anche se $a < c < b$

Il punto fondamentale è che ora

$$\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx$$



Vale in realtà per ogni ordinamento di a, b, c .

Idea della dim.

Prendo step. f. sopra e sotto in $[a, b]$ e $[b, c]$ e le riucollo per avere quelle in $[a, c]$.

Idea per dim. alternativa: si definisce l'integrale solo per funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ purché

- limitata
- nulle fuori da un intervallo.

A quel p.to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) dx$$

↑ f estesa a 0 fuori di $[a, b]$

A quel p.to l'additività rispetto alla zona di integrazione segue dall'additività semplice.

Domanda / esercizio : cosa diventa la proprietà senza assumere l'integrabilità.

COME SI CALCOLANO

Setting : data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, voglio calcolare

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Procedura Cerco UNA funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in $[a, b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

(basta F continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b))

A quel p.to

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

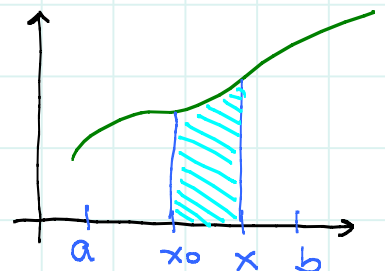
Ogni F con questa proprietà si dice PRIMITIVA di $f(x)$ (ANTIDERIVATIVE in inglese).

Def. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Fisso $x_0 \in [a, b]$.

Si dice funzione integrale la funzione definita da

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$$

↑ ↑
usare un
nome diverso
da x



Proprietà semplici della funzione integrale

① $F(x_0) = 0$

② Se $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora F è M -lipschitziana, e quindi in particolare continua, cioè

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq M |x_2 - x_1| \quad \forall x_1 \in [a, b] \quad \forall x_2 \in [a, b]$$

Dim Assumiamo wlog che $x_1 \leq x_2$. Allora

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{additività zona integr.} \end{aligned}$$

Quindi $|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right|$

$$\begin{aligned} &\quad \text{val. assoluto} \rightarrow \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \\ &\quad \text{monotonia dell' integrale} \rightarrow \leq \int_{x_1}^{x_2} M dx \\ &\quad \text{caso banale} \rightarrow = M(x_2 - x_1) \\ &\quad x_2 \geq x_1 \rightarrow = M |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

③ Per ogni intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ vale la formula

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Dim $\int_c^d f(x) dx = \int_{x_0}^d f(x) dx - \int_{x_0}^c f(x) dx$ additività risp. alla zona di integr.

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora per ogni scelta di x_0 la funzione integrale F è derivabile e soddisfa

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

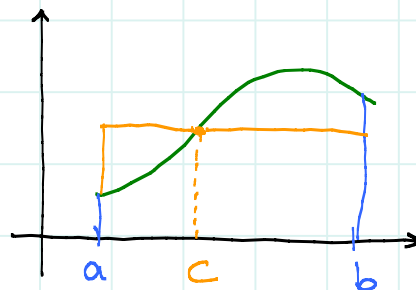
Teorema (della media integrale)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esiste $c \in [a, b]$ t.c.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Interpretazione geometrica Possiamo scriverlo come

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{area sotto il} \\ \text{grafico}}} = \underbrace{f(c)(b-a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{area di un} \\ \text{rettangolo con} \\ \text{base } [a, b] \text{ e} \\ \text{altezza } c}}$$



Dim. Per w. f ammette in $[a, b]$ un minimo m e un massimo M , cioè

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Per monotonia dell'integrale

$$\underbrace{\int_a^b m dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b M dx}_{M(b-a)}$$

Dividendo per $b-a$ trovo

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\lambda = \text{numero compreso tra min e max}} \leq M$$

[Fiu qui andava bene anche senza continuità usando $m = \inf$ e $M = \sup$]

Essendo f continua, per forza assume tutti i valori tra m e M .
— o — o —

Oss. Con il senso di poi il teo. della media integrale è Lagrange applicato a F .
— o — o —