

Aurebbe dimostrato che l'integrale definito come $I^-(f) = I^+(f)$ coincide con quello che ci aspettavamo per funzioni costanti e step. f.

Teorema misterioso

Almeno le seguenti funzioni sono integrabili

→ quelle monotone → ora

→ quelle continue → secondo semestre

→ quelle continue tranne un numero finito di p.ti → esercizio

Criterio di integrabilità $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due step funct.

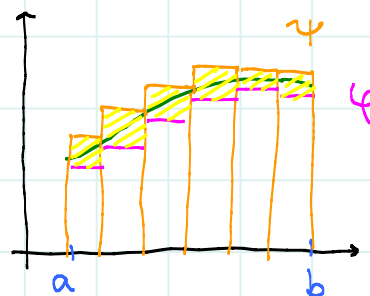
$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

tali che

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$

[Posso sempre supporre φ e ψ ottenute dalla stessa partizione di $[a, b]$]

Moralmente: area tra φ e ψ è $\leq \varepsilon$.



Dim. criterio: quasi ovvia.

Segue dalla caratterizzazione di inf e sup

Più in generale, dati due insiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ con

$$a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

allora $\sup A = \inf B$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad \text{t.c.} \quad b - a < \varepsilon.$$

A B

Dim (che le f monotone sono integrabili)

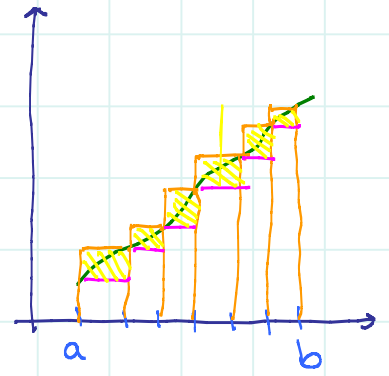
Facciamo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ debolm. cresc.

(l'altro caso è analogo).

Dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$



Definisco $\psi(x) = f(x_i) \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

Per deb. cresc.

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{b-a}{n} \right)}_{\text{base}} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \quad \leftarrow \text{Questa è telescopica}$$

$$= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere n grande e diventa $\leq \varepsilon$.

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTEGRABILI

① Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili, allora $f+g$ è integrabile e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Dim Per il criterio di integrabilità esistono s.f. tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_1(x) \\ \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi_2(x) \leq g(x) \leq \psi_2(x) \\ \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b (\psi_1(x) - \varphi_1(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b (\psi_2(x) - \varphi_2(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora basta osservare che

$$\underbrace{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}_{\varphi_3(x)} \leq f(x) + g(x) \leq \underbrace{\psi_1(x) + \psi_2(x)}_{\psi_3(x)} \\ \forall x \in [a, b]$$

$$e \int_a^b (\psi_3(x) - \varphi_3(x)) dx = \int_a^b [(\psi_2(x) - \varphi_2(x)) + (\psi_1(x) - \varphi_1(x))] dx$$

Qui sto usando la
tesi: me solo
per step functions
per le quali è più
semplice da dimostrare

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_a^b (\psi_2(x) - \varphi_2(x)) dx + \int_a^b (\psi_1(x) - \varphi_1(x)) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

② Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora
 λf è integrabile e

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Dim Ancora criterio di integrabilità (occhio ai λ negativi)

① + ② L'insieme delle funzioni integrabili in $[a, b]$ è uno
sp. vett. e l'integrale è un'applic. lin. da questo
spazio in $\mathbb{R}$.

③ (Monotonia dell'integrale) Se f e g sono int. in $[a, b]$ e
 $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

[Basta considerare le
somme superiori]

Oss. (wokista) Cosa si salva di ①, ②, ③ senza assumere l'integrabilità

④ (Int. e valore assoluto) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, allora $|f|$ è integrabile e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

È analogo di $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

Morale: al RHS tutte le aree contano con il +, al LHS c'è una somma algebrica

Oss. Se $|f|$ è integrabile, possiamo dire che f è integrabile?

NO! $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ in ogni $[a, b]$

⑤ (Prodotto) Se f e g sono integrabili, allora $f \cdot g$ è integr. ma in generale

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Domanda: cosa si può dire quando sono uguali?

Dim. delicata per la gestione dei segni

⑥ (Proprietà di reticolo) Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

Dim $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

— o — o —