

INTEGRALI PROPRI (Integrale di RIEMANN)

- Come si indicano
- Significato geometrico
- Come si definiscono
- Come si calcolano

1 Notazioni

$\int_a^b f(x) dx$

estremi di integrazione (sopra b e sotto a)
 indica la variabile di integrazione (sotto x)
 funzione integranda (sopra $f(x)$)
 simbolo di integrale (sopra $\int$)
 (Suddivisa)

Ingredienti fondamentali

- ① zona di integrazione $[a, b]$ limitata
 - ② $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata
- } se almeno uno manca
 l'integrale è improprio

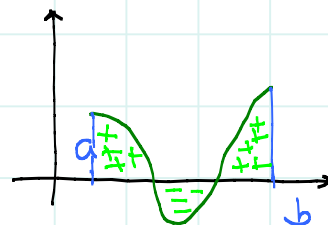
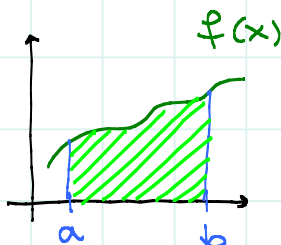
Estensioni della notazione: $\int_D f(x) dx$ $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{estremi uguali})$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (\text{estremi invertiti})$$

Le ultime due sono definizioni per cui in seguito consideriamo solo $a < b$.

2 Significato geometrico



$$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno della parte di piano compresa tra asse } x \text{ e il grafico di } f.$$

Con segno: parti sopra axe x contano con il segno $+$, quelle sotto con il segno $-$.

[3] Definizione Si può dare in tanti modi equivalenti

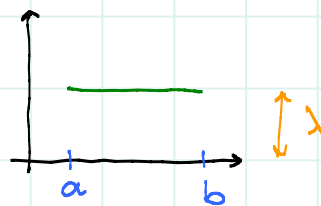
→ DARBOUX anarchica (questa lezione)

→ " ortodossa

→ RIEMANN

Tre fasi : $\rightarrow$ caso banale
 $\rightarrow$ caso semibanale
 $\rightarrow$ caso generale

Caso banale $f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a, b]$
 $\uparrow$
 costante



Si poue

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda (b-a) = \text{area rettangolo}$$

$\uparrow$
 lunghezza base
 altezza con segno

Caso semi banale Esiste una suddivisione di $[a, b]$

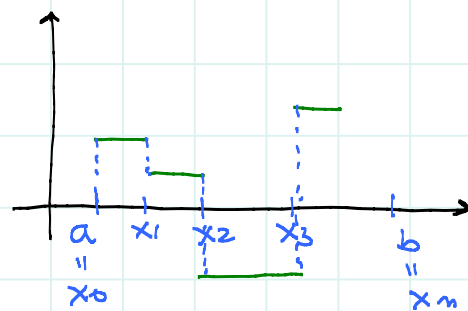
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ed esistono costanti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

(negli estremi si può decidere a piacere)

In questo caso si pone



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1}) = \text{somma algebrica delle aree dei vari rettangoli.}$$

Queste funzioni si chiamano

FUNZIONI A GRADINO (STEP FUNCTION)

Oss. Una step function è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli

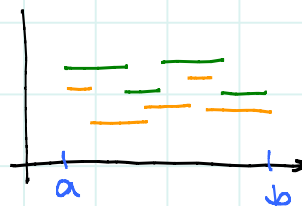
La funzione caratteristica di un intervallo vale 1 nell'intervallo e 0 fuori (agli estremi si può decidere)

Lemma non ovvio

① Se due comb. lineari di caratt. danno la stessa step function, allora l'integrale è lo stesso.

② Se una step function è $\geq$ di un'altra per ogni $x \in [a, b]$, allora il suo integrale è $\geq$ dell'altro

[Sotto a tutto serve un sotto-lemma che dice che due step function si possono sempre definire a partire dalla stessa partizione]



Caso generale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata qualunque
Si definisce

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \begin{array}{l} \psi \text{ è una step.funct.} \\ \psi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{array} \right\}$$

↙ somme superiori

↑
integrale superiore

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \begin{array}{l} \varphi \text{ è una step.funct.} \\ \varphi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{array} \right\}$$

↙ somme inferiori

↑
integrale inferiore



Lemma $I^-(f) \leq I^+(f)$

Dim tutte le somme inferiori sono $\leq$ tutte le somme superiori

Def. Se per caso $I^-(f) = I^+(f)$, allora si dice che f è integrabile (secondo RIEMANN) in $[a, b]$ e il valore comune è indicato con

$$\int_a^b f(x) dx$$

Oss. L'ipotesi che f è limitata garantisce l'esistenza di step $f \geq$ e $\leq$.

Esempio in cui $I^- < I^+$ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

In questo caso $I^+ = 1$ e $I^- = 0$

FUNZIONE DI
DIRICHLET.