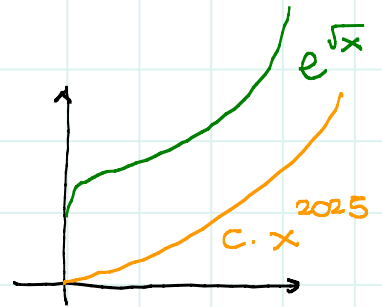


Esercizio 1 Stabilire se esiste una costante $c > 0$ tale che

$$e^{\sqrt{x}} \geq c \cdot x^{2025} \quad \forall x \geq 0$$

Idea: sembra vero per c abbastanza piccolo



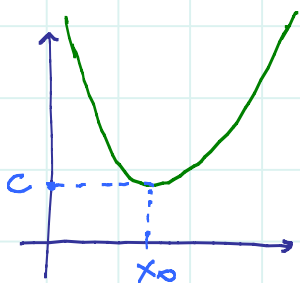
Isdo c : $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{2025}} \geq c$ $x^{2025} \cdot e^{-\sqrt{x}} \leq \frac{1}{c}$
 ↑ potenzialmente pericoloso
 per $x=0$, ma in realtà per
 $x=0$ ogni c va bene, quindi
 basta sistemare gli $x > 0$.

Pongo $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{2025}}$ e dimostro che ha un minimo > 0
 (o almeno un minorante > 0)

[Alternativa: dimostro che $g(x) = x^{2025} \cdot e^{-\sqrt{x}}$ ha massimo, o
 almeno un maggiorante, per $x \geq 0$]

Osservo che $f \in C^\infty((0, +\infty))$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \uparrow \quad \left[\frac{1}{0^+}\right]$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \uparrow \quad \sqrt{x} = y \text{ e poi esponenziale batte potenza}$$

Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ esiste il minimo
 Il minimo è il valore in un certo x_0 , e
 quindi per forza è > 0 .

Volendo si può anche calcolare c andando a studiare la derivata.

Analogamente, l'esistenza del max per la $g(x)$ segue da $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ continua con $g(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Esempio 2 Dimostrare che esiste $c > 0$ tale che

$$\sin^2(4x) + \cos^6(4x) \geq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim. sbagliata: $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (i due addendi sono ≥ 0 e non si possono annullare insieme) quindi il c esiste

Oss. Anche $e^{-x^2} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma non esiste $c > 0$ t.c.

$$e^{-x^2} \geq c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

[Se esistesse, facendo il limite per $x \rightarrow +\infty$ troverei $0 \geq c$, il che confligge con $c > 0$].

Dim. corretta

$f(x)$ è continua e periodica (ad esempio con periodo 2π). Quindi per W. generalizzato alle periodiche esiste

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

Ora questo min è $f(x_0)$ per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$, e questo di sicuro è positivo.

Esercizio 3

$$f(x) = x^{2025} + \sin x \cdot \sin x$$

$$g(x) = \sin x + x^{2025} \cdot \sin x$$

(a) Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'eq. $g(x) = \lambda$ ha almeno una soluzione reale.

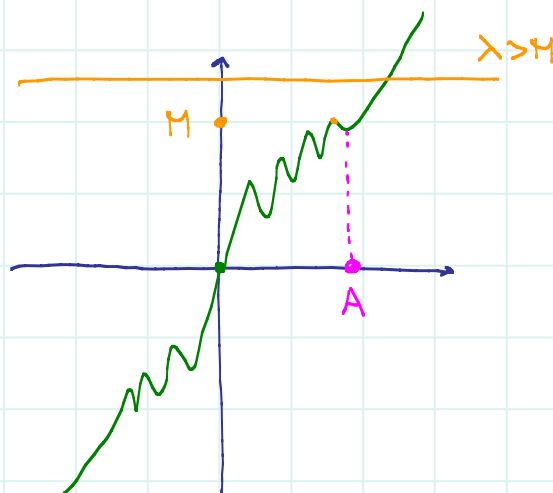
Si tratta della sang. di $g(x)$ che segue da continuità +

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty \quad (\text{basta raccogliere } \sin x)$$

(b) Dimostrare che, per λ abbastanza grande, la sol. è unica.

Pensiamo che il grafico sia come in figura

$$g'(x) = \cos x + 2025 x^{2024} \sin x + x^{2025} \cos x$$



Osservo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$
(grazie a $\cos x$)

Quindi esiste $A > 0$ t.c. $g : [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva
(in quanto strettl. cresc.)

Claim : esiste $M := \max \{g(x) : x \leq A\}$
e per ogni $\lambda > M$ la soluzione di $g(x) = \lambda$ è unica

→ esistenza del max: W. generalizzato (sistemare i dettagli)

→ unicità per $\lambda > M$. Almeno una sol. esiste. Dove può stare?

Prima di A no, perché $\lambda > M$. Quindi sta dopo A. Ma dopo A la funzione g è iniettiva.

(c) Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = \lambda$ ha sempre infinite soluzioni reali.

- Basta dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste almeno una soluzione $\geq k$

[Prima trovo soluzione $x_0 \geq 0$ (uso $k=0$)

Poi trovo soluzione $x_1 \geq x_0 + 1$ (uso $k = x_0 + 1$)

Poi trovo soluzione $x_2 \geq x_1 + 1$ (uso $k = x_1 + 1$)

e così via]

- Basta dimostrare che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, esistono $k \leq A < B$ tali che $f(A) > \lambda$ e $f(B) < \lambda$.

[Poi uso teo. valori intermedi tra A e B]

- Basta dimostrare che esistono due successioni A_n e B_n t.c.

$$A_n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(A_n) \rightarrow +\infty$$

$$B_n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(B_n) \rightarrow -\infty$$

[Fissato k e λ trovo p.ti $> k$ in cui f vale di più e di meno di λ]

- Li esibisco

$$A_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (\text{così} \sin A_n = 1)$$

$$B_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad (\text{così} \sin B_n = -1 \text{ e} \sin B_n \text{ vince})$$

— o — o —

