

# MAX E MIN IN UNA VARIABILE

Setting :  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \} = \text{immagine di } A$$

Def. Si dice che

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \}$$

se

$$(i) f(x) \leq M \quad \forall x \in A$$

$$(ii) \exists x_0 \in A \text{ t.c. } f(x_0) = M$$

In tal caso tutti gli  $x_0 \in A$  per cui vale la (ii) si chiamano  
p.ti di max

Discorso analogo per

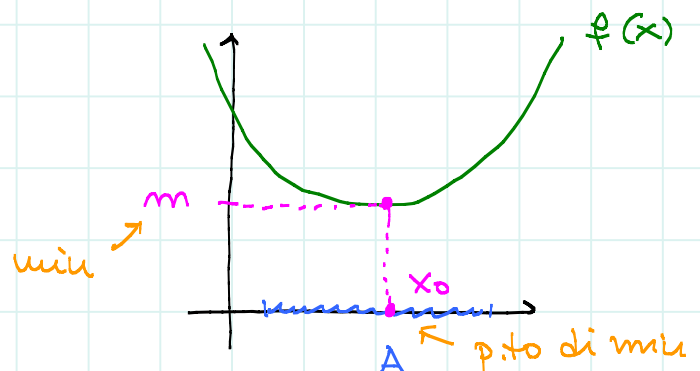
$$m = \min \{ f(x) : x \in A \}$$

Oss. ① Max e min non sono obbligati ad esistere

② Se esistono, sono per forza unici

③ I p.ti di max esistono se e solo se esiste il max, e non sono obbligati ad essere unici

④ Max e min sono valori assunti dalla funzione (delle y) mentre i p.ti di max/min stanno in A (delle x)



## Teorema (WEIERSTRASS BABY)

Sia  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo, e sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

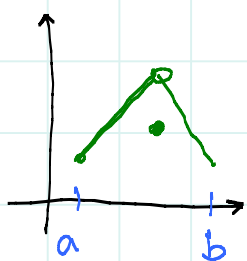
Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

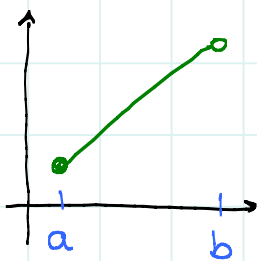
Oss. Le ipotesi fondamentali sono tre

- ① La funzione è continua ovunque
- ② L'intervallo ha gli estremi
- ③ L'intervallo è limitato



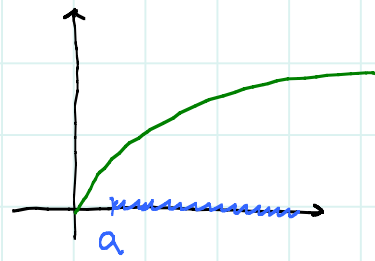
Non continua  
in un solo p.to  
e manca max

①



Manca estremo b  
e manca il max

②



Definita su una  
semiretta e manca  
il max

③

Esercizio È possibile trovare

- ①  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continua senza né max né min?
- ②  $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  " "
- ③  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tranne in  $\frac{1}{2}$  senza né max né min?

Achtung! Se falliscono tutte o alcune delle ipotesi di Weierstrass, allora BOH, cioè max / min possono esistere lo stesso.

Esempio  $f(x) = \sin x$ ,  $A = \mathbb{R}$

Max e min esistono e ci sono infiniti p.ti di max/min.

Analogamente  $f(x) = \cos x$   $A = (0, 100)$

Da via ordinamento Dimostriamo che esiste il minimo.

Di sicuro esiste

$$I = \inf \{ f(x) : x \in [a, b] \} \quad (\text{per ora potrebbe essere pure } -\infty)$$

Poniamo

$$x_0 = \inf \{ x \in [a, b] : \inf \{ f(t) : t \in [a, x] \} = I \} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{non vuoto} \\ \text{perché c'è } b \end{array}$$

Claim:  $f(x_0) = I \leftarrow$  a questo p.to sarà reale

Di sicuro  $f(x_0) \geq I$ , perché  $I$  è l'inf su tutto.

Supponiamo per assurdo che  $f(x_0) > I$ .

Ci sono due casi

- $x_0 = a$ . Prendiamo un reale  $c$  tale che  $f(x_0) > c > I$

Allora per continuità esiste  $\delta > 0$  t.c.

$$f(x) \geq c \quad \forall x \in [a, a+\delta]$$

Questo ci dice che

$$\inf \{ f(t) : t \in [a, x] \} \geq c$$

per ogni  $x \in [a, a+\delta]$  il che ci dice che  $x_0$  non è l'inf.

- $x_0 > a$ . Prendiamo  $c$  come sopra.

Come sopra

$$f(x) \geq c \quad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$$

Osseviamo inoltre che

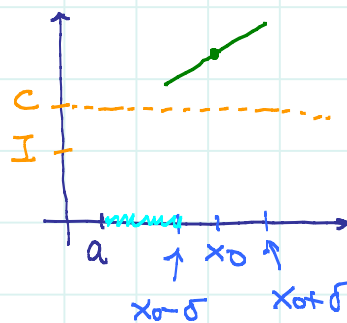
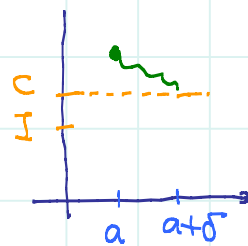
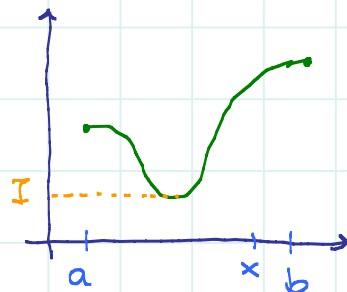
$$\inf \{ f(t) : t \in [a, x_0-\delta] \} = c_1 > I$$

perché altrimenti  $x_0$  non sarebbe l'inf.

Ma allora per ogni  $x \in [a, x_0+\delta]$  avremmo che

$$\inf \{ f(t) : t \in [a, x] \} \geq \min \{ c_1, c \} > I$$

e non va bene



— o — o —

Domanda : come trovare p.ti di max/min, e quindi anche M e m?

Risposta : i p.ti stanno in una di queste 3 categorie

- ① P.ti STAZIONARI interni : p.ti  $x \in (a, b)$  t.c.  $f'(x) = 0$
- ② P.ti SINGOLARI interni : p.ti  $x \in (a, b)$  t.c.  $f'(x)$  non esiste
- ③ P.ti del BORDO :  $x = a$  e  $x = b$ .

Operativamente : calcolo tutti i p.ti del tipo ①, ②, ③, li sostituisco nella funzione e vedo dove vale di più o di meno. Se sono indeciso su un p.to, ce lo metto e non perdo nulla.

Dim Max e min esistono per W. Prendiamo un qualunque p.to  $x_0$  di max/min.

- Se sta sul bordo, allora è di tipo ③
- Se sta in  $(a, b)$  e  $f'(x_0)$  non esiste, allora è di tipo ②
- Se sta in  $(a, b)$  e  $f'(x_0)$  esiste, quanto può valere  $f'(x_0)$ ?
  - se fosse  $f'(x_0) > 0$ , allora per monotonia 1  $f(x)$  vale più di  $f(x_0)$  un po' a dx e vale meno di  $f(x_0)$  un po' a sx, quindi  $f(x_0)$  non può essere max/min.
  - se fosse  $f'(x_0) < 0$ , allora idem scambiando dx e sx.

Quindi l'unica possibilità è che  $f'(x_0) = 0$  e allora è di tipo ①.

Oss. Abbiamo usato che  $x_0$  è interno nel finale per poterlo spostare a dx/sx.

Piccola Variante : Se  $x_0 = a$  è p.to di min. e  $f'(x_0)$  esiste, allora  $f'(a) \geq 0$   
(se fosse  $f'(a) < 0$ , allora un po' a dx  $f(x)$  varrebbe meno di  $f(a)$ ).

— 0 — 0 —