

LEGAMI TRA MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

MONOTONIA 1 Segno della derivata in un p.to

Setting: $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $f: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ (f definita dalle parti di x_0)

Supponiamo che $f'(x_0) > 0$.

Allora (un po' a dx vale di più, un po' a sx vale di meno)

esiste $\delta \in (0, \varepsilon)$ t.c.

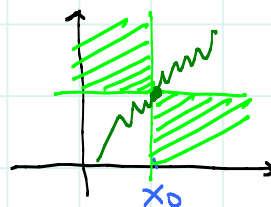
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Achtung! La tesi NON è che f è monotona in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Dim Ricordiamo la def. di derivata

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Se $f'(x_0) > 0$, allora per permanenza del segno esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

• Per $h > 0$ il denominatore è > 0 , quindi anche numeratore > 0 , cioè

$$f(x_0 + h) > f(x_0) \quad \forall h \in (0, \delta)$$

• Per $h < 0$ allo stesso modo

$$f(x_0 + h) < f(x_0).$$

Oss. Discorso analogo con l'ipotesi $f'(x_0) < 0$.

MONOTONIA 2 Segno della derivata in un intervallo

Setting : $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in tutto (a,b) .

Allora valgono le seguenti implicazioni

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ debolm. cresc. in (a,b)

(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strett. cresc. in (a,b)

(iii) f deb. cresc. in $(a,b) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(iv) f strett. cresc. in $(a,b) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

[↑]
guai a pensare che sia stretta.

Esempio $f(x) = x^3$ è strett. cresc. in $(-1,1)$, ma $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x=0$.

Teorema misterioso (LAGRANGE)

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$ (estremi compresi)

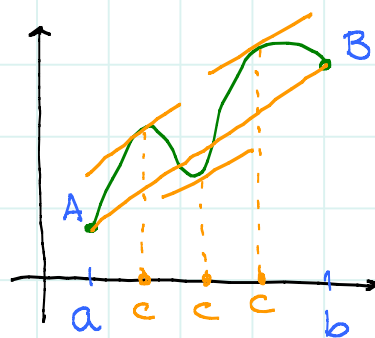
(ii) f derivabile in (a,b) (se lo è pure in $[a,b]$, ancora meglio)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a,b)$ t.c.

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

Interpretazione geometrica lo scrivo come

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{\substack{\text{"} \\ \text{coeff. angolare} \\ \text{retta AB}}} = \underbrace{f'(c)}_{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. angolare} \\ \text{retta tangente} \\ \text{nel p.to con.} \\ a \quad c}}$$



Lagrange: esiste almeno un p.to in cui
la retta tangente è $\parallel$ ad AB.

Dim monotonia 2

(i) + (ii) Siano $a < x_1 < x_2 < b$. Allora per Lagrange in $[x_1, x_2]$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{f'(c)}_{\text{misterioso in } (x_1, x_2)}$$

Se $f' \geq 0$ sempre, allora $f(x_2) \geq f(x_1)$ sempre

Se $f' > 0$ sempre, allora $f(x_2) > f(x_1)$ sempre

(iii) + (iv) Sia $x_0 \in (a, b)$. Per monotonia $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ per $h > 0$ e abbastanza piccolo. Ma allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\geq 0} \geq 0$$

Oss. Se faccio $h \rightarrow 0^-$ la frazione era comunque ≥ 0

Se avevo la stretta crescente, avevo che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{per } h > 0 \text{ piccolo}$$

ma le disuguaglianze strette non passano al limite.

MONOTONIA 3 (Annullamento sporadico)

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in ogni p.to.

Supponiamo che

(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

(ii) $f'(x)$ non sia nulla in un intero intervallo (annullamento sporadico)

Allora f è strett. cresc. in (a, b) (e non solo debolm.)

Dim Già sappiamo che f è debbm. cresc.

Se non lo fosse strettamente, ci sarebbe almeno un tratto piatto, nel quale $f'(x)$ sarebbe $= 0$ sempre.

— 0 — 0 —

Esercizio 1 Sia $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log x - \arctan(e^x + x^2) + x^3$$

Dimostrare che f è surgettiva.

Basta osservare che f è continua e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

Essendo $(0, +\infty)$ connesso, da f assume tutti i valori tra inf e sup.

Esercizio 2 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x + \sin x$$

Dimostrare che è bigettiva

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, di sicuro è surg.

Ora $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e inoltre

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$$

quindi f' ha annullamento sporadico

Monotonia 3 $\Rightarrow f$ strett. cresc. $\Rightarrow f$ iniettiva.

Esercizio 3 $x^5 - \arctan x + \log(1+x^{20}) = 0$

ha almeno tre soluz. reali.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad f(x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\leadsto f'(0) = -1$$

Monotonia 1: $\exists x_1 < 0$ t.c. $f(x_1) > 0$

$\exists x_2 > 0$ t.c. $f(x_2) > 0$

