

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Teorema Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, b]$,

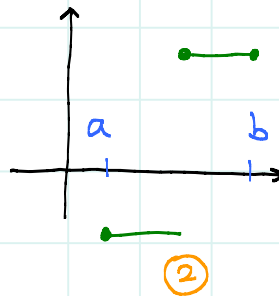
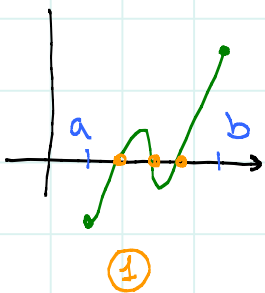
(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè f ha segno diverso agli estremi)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Oss. ① Il p.to c non è obbligato ad essere unico.

② La continuità in tutto $[a, b]$ è fondamentale.

③ I numeri reali sono fondamentali



$f(x) = x^2 - 2$ in $[0, 2]$
in $\mathbb{Q}$ non ha radici

③

Dim 1 (inf + assurdo) Assumo wlog $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Poniamo

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

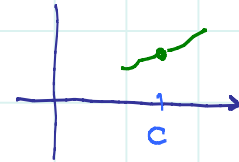
$\neq \emptyset$ perché almeno contiene b

Claim: $f(c) = 0$.

Supponiamo $f(c) > 0$. Allora c'è un assurdo a sx.

Essendo f continua, esiste $\delta > 0$ t.c.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in (c - \delta, c)$, e quindi c non può essere l'inf.

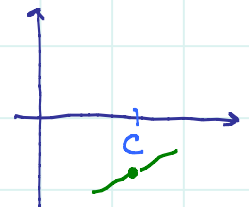


Supponiamo $f(c) < 0$. Allora c'è un assurdo a dx.

Essendo f continua, esiste $\delta > 0$ t.c. $f(x) < 0$ per ogni

$x \in (c, c + \delta)$. Ma per caratterizzazione di inf dovrebbe

esistere $x \in (c, c + \delta)$ t.c. $f(x) > 0$. Quindi assurdo. $\square$



Oss. Se volevo usare il sup, potevo porre

$$c := \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$

Potevo anche porre

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \}$$

$$c := \sup \{ x \in [a, b] : f(x) \leq 0 \}$$

Esercizio 1 - Rifare la dim con ciascuna delle quattro definizioni

2 - Trovare un esempio in cui le 4 def. producano 4 c diversi.

Dim 2 (inf + diretta) Come prima poniamo

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

Osservo che $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, c)$. (altrimenti $\inf < c$)

Quindi

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq 0.$$

D'altra parte, per caratterizzazione di inf, per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in [c, c + \delta]$ t.c. $f(x) > 0$. Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ e trovo x_n tale che $c \leq x_n \leq c + \frac{1}{n}$ t.c. $f(x_n) > 0$.

Per i carabinieri $x_n \rightarrow c$ e quindi per continuità

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x_n)}_{>0} \geq 0$$

Mettendo insieme le due disug. abbiamo la tesi.
— 0 — 0 —

Dim 3 (Bisezione) Costruisco una succ. di intervalli $[a_n, b_n]$ in questo modo.

• Pongo $[a_0, b_0] = [a, b]$

• Quando il p.to medio: se lì $f = 0$

abbiamo finito, altrimenti abbiamo un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ t.c.



f assume valori di segno diverso agli estremi, cioè

$$f(a_1) < 0 \quad f(b_1) > 0$$

• Procedendo in modo analogo trovo una succ. $[a_n, b_n]$ t.c.

$$f(a_n) < 0 \quad f(b_n) > 0$$

e

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{la lungh. si dimezza a ogni passaggio}$$

Ora la succ. a_n è debolm. cresc. e $a_n \leq b$ sempre

" " b_n è debolm. decr. e $b_n \geq a$ sempre

Quindi

$$a_n \rightarrow a_\infty \quad \text{e} \quad b_n \rightarrow b_\infty$$

Suolbre

$$\begin{array}{ccc} b_n - a_n & = & \frac{b-a}{2^n} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_\infty - a_\infty & = & 0 \end{array}$$

Quindi $a_\infty = b_\infty$ e questo è il c che ci interessa. Infatti

$$f(c) = f(a_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(a_n)}_{< 0} \leq 0$$

$$f(c) = f(b_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{f(b_n)}_{> 0} \geq 0$$

— 0 — 0 —

Teorema (INTERMEDIATE VALUE THEOREM)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che

$$f(a) < \lambda \quad \text{e} \quad f(b) > \lambda \quad (\text{o viceversa})$$

Allora esiste almeno un $c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = \lambda$.

Dim Applico il teo. di esistenza degli zeri a $g(x) = f(x) - \lambda$. $\square$

EFFETTO OTTICO DI ANALISI 1

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se, per ogni coppia di elementi P e Q di A , anche tutto il segmento PQ è contenuto in A .

Def. (Brutale) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice Connesso se è fatto "da un pezzo solo".

Effetto ottico Per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ vale che
convesso $\Leftrightarrow$ connesso

I sottoinsiemi convessi / connessi di $\mathbb{R}$ sono solo

- $\emptyset$
- p.ti singoli $\{a\}$
- gli intervalli con o senza estremi (a,b) $(a,b]$ $[a,b)$ $[a,b]$
- semirette $[a, +\infty)$ $(a, +\infty)$ $(-\infty, a)$ $(-\infty, a]$
- tutto $\mathbb{R}$

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e connesso.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f assume in A tutti i valori strettamente compresi tra $\inf$ e $\sup$ ($\inf$ e $\sup$ li può assumere o no a seconda dei casi).

Dim Sia $\inf < \lambda < \sup$.

Per caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$ esiste $a \in A$ t.c. $f(a) < \lambda$

Per lo stesso motivo esiste $b \in A$ t.c. $f(b) > \lambda$.

Ora uso il teorema dei valori intermedi in $[a,b]$, che per convessità / connessità $\subseteq A$.

— o — o —