

Esercizio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

$$\frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Quella a dx conv., quindi converge anche la nostra

NO!!! Il confronto vale solo tra serie a termini ≥ 0 , e la nostra non lo è.

La soluzione corretta è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

$\uparrow$ $0 \leq \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\uparrow$ assoluta convergenza

e quindi posso usare il confronto

Esercizio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + 2}{n}$ diverge

$$\frac{\cos n + 2}{n} \geq \frac{1}{n} \quad \text{e quindi la nostra diverge per confronto.}$$

Esercizio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + 5}{n^4 - 3n + 8}$

Non converge assolutamente perché $|...| \sim \frac{1}{n}$

1° modo Leibnitz diretto. Devo dim. che $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente, cioè

$$\frac{(n+1)^3 + 5}{(n+1)^4 - 3(n+1) + 8} \leq \frac{n^3 + 5}{n^4 - 3n + 8}$$

$$[(n+1)^3 + 5](n^4 - 3n + 8) \leq (n^3 + 5)[(n+1)^4 - 3(n+1) + 8]$$

Basta portare tutto a dx e sperare che la pot. + grande ha coeff. > 0 .

Calcolo solo i termini di grado ≥ 6 :

$$[n^3 + 3n^2 + \dots][n^4 + \dots] \leq (n^3 + \dots)(n^4 + 4n^3 + \dots)$$

$$n^7 + 3n^6 + o(n^6) \leq n^7 + 4n^6 + o(n^6)$$

resta $n^6 + o(n^6) \geq 0$ che è vero definitivamente

2° modo Brutale: frazione $\sim \frac{1}{n}$

Rigoroso: aggiungo e tolgo!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\left[\frac{n^3 + 5}{n^4 - 3n + 8} - \frac{1}{n} \right]}_{\text{Spero che converga assolut.}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}_{\text{converge per Leibnitz}}$$

$$\frac{\cancel{n^4} + 5n - \cancel{n^4} + 3n - 8}{n(n^4 - 3n + 8)} \sim \frac{8n}{n^5} \sim \frac{8}{n^4} \quad \text{☺}$$

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 2}{n^2 + 7}$

Niente convol. nec. $\rightarrow$ addio convergenza

Però cosa fa delle altre 3 possibilità?

Brutale: $\dots \sim \sum (-1)^n$ quindi è diver.

1° modo Entro nella dim. di Leibnitz e arrivo fino a

$$S_{2m} \rightarrow l_1 \quad \text{e} \quad S_{2m+1} \rightarrow l_2 \quad (\text{a patto di verificare l'ipotesi di monotonia})$$

Nello step 4 deduco che $l_1 - l_2 = 1$, quindi $l_1 \neq l_2$

2° modo Aggiungo e tolgo 1 alla frazione. Diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2 + 2}{n^2 + 7} - 1 \right]$$

Ora $\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 = \frac{n^2+2 - n^2-7}{n^2+7} = -\frac{5}{n^2+7}$

e quindi la seconda serie converge assol., ma la prima è indeterminata, quindi la somma è indet.
 $\quad \quad \quad -0-0-$

Esercizio 5 Studiare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\arctan(a^n)}{n^a}}_{a_n}$$

$\boxed{a > 1}$ $0 \leq a_n \leq \underbrace{\frac{\pi}{2} \frac{1}{n^a}}_{\uparrow \text{ questa converge}}$

$\boxed{a = 1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1)}{n} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e diverge

$\boxed{0 < a < 1}$ Ora l'argomento di $\arctan$ tende a 0

Brutale: $a_n \sim \frac{a^n}{n^a}$ che converge per la radice

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{a^n}{n^a}$... $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(a^n)}{a^n} = 1 \neq 0 \neq +\infty$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$

Per quest'ultima uso la radice

$$\sqrt[n]{b_n} \rightarrow a \in (0,1), \text{ quindi } \sum b_n \text{ converge}$$

$\boxed{a = 0}$ Sono tutti 0.

$\boxed{-1 < a < 0}$ Assoluta convergenza

$$|a_n| = \frac{\arctan(|a|^n)}{n^a} \text{ e come prima C.A. con } b_n = \frac{|a|^n}{n^a}$$

e quindi converge

$\boxed{a = -1}$ Diventa $\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$

e questa non converge. Volendo si può capire cosa fa.
(Basta scrivere le somme parziali)

$\boxed{a < -1}$ $|a_n| \rightarrow +\infty$, quindi la serie non converge.

Conclusione: converge $\Leftrightarrow a \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Esercizio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^{2025}}{2^{\sqrt{n}}}}_{a_n}$

Si vede che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ quindi BOH 😞

Provo confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^7}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2032}}{2^{\sqrt{n}}} = e^{2032 \log n - \sqrt{n} \log 2} \rightarrow 0 \quad (\text{caso limite!})$$

$\leadsto a_n \leq b_n$ definitivamente $\ddot{\smile}$

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \arcsin\left(\frac{n^3}{3^n}\right)$

Per quali $a \in \mathbb{R}$ converge?

Brutale: $\sim a^n \frac{n^3}{3^n}$ radice $\rightarrow \frac{a}{3} < 1 \quad a < 3$

Rigoroso: per $|a| < 3$ uso assol. conv. + C.A. con $\left(\frac{|a|}{3}\right)^n n^3$
+ criterio della radice

Per $|a| \geq 3$ manca cond. nec.
— 0 — 0 —