

Serie a termini di segno variabile : $\rightarrow$ Leibnitz
 $\rightarrow$ Assoluta convergenza

CRITERIO DI LEIBNIZ (Aka serie a segno alterno)

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_n$$

Supponiamo che

(i) $d_n \geq 0$ definit. (cioè la serie è a segni alterni)

(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ definit. (deb. decr.)

(iii) $d_n \rightarrow 0$ (cond. nec.)

Allora la serie converge.

Oss. Se non sono verificate (i) e/o (ii), allora BOH

Se non è verificata (iii), allora di sicuro non converge (e restano aperte 3 possibilità)

Def. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ è convergente}$$

CRITERIO ASSOLUTA CONV. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ conv.}$

Utilizzo operativo Devo studiare $\sum a_n$. Provo a studiare $\sum |a_n|$.

$\rightarrow$ se converge, allora converge anche quella iniziale $\hat{=}$

$\rightarrow$ se diverge (e non può fare altro) allora BOH.

Per $\sum |a_n|$ ho a disposizione molti strumenti

Dim. Leibniz Idea: rappresentiamo le somme parziali nel piano cartesiano



Step 1 $S_{2m+2} \leq S_{2m}$ perché

$$S_{2m+2} = S_{2m} - \underbrace{d_{2m+1} + d_{2m+2}}_{\leq 0 \text{ per Hp 2}} \leq S_{2m}$$

Analogamente $S_{2m+3} \geq S_{2m+1}$ (sto assumendo wlog che (i) e (ii) valgano sempre e non solo defiu.)

Step 2 $S_{2m} \geq S_{2m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ ed $m \in \mathbb{N}$
(tutte le pari sono maggiori di tutte le dispari)

Caso 1: $m \geq n$ Allora $S_{2m} \geq S_{2m} \geq S_{2m+1}$
 $\uparrow$ step 1 $\uparrow$ $S_{2m+1} = S_{2m} - d_{2m+1}$

Caso 2: $m < n$ Allora $S_{2m+1} \leq S_{2m-1} \leq S_{2m}$
 $\uparrow$ suidispari sale $\uparrow$ $S_{2m-1} + d_{2m}$

Step 3 La succ. S_{2m} è debolm. decr. e limitata inferiormente (perché $S_{2m} \geq S_1$). Per il teo. succ. monotone

$$S_{2m} \rightarrow l_1$$

Analog. S_{2m+1} è debolm. cresc. e limitata sup. ($S_{2m+1} \leq S_0$)

Per il teo. succ. monotone $S_{2m+1} \rightarrow l_2 (\leq l_1)$

Step 4 $l_1 = l_2$. Infatti

$$\begin{array}{ccccc} S_{2m+1} & = & S_{2m} & - & d_{2m+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l_2 & & l_1 & & 0 \end{array}$$

Questo basta per concludere che $S_m \rightarrow l_1 = l_2$
 $\uparrow$ tutta.

Lemma delle 2 sottosucc. Se a_n ha due sottosucc. che

→ esauriscono tutti i termini

→ hanno lo stesso limite $l \in \mathbb{R}$

allora tutta la succ. tende allo stesso l .

Dim Basta prendere un "definitivamente comune"

Oss. → Vale anche con 2025 s. succ.

→ Vale se sono infinite (esercizio molto interessante) ?
— 0 — 0 —

Dim assoluta convergenza : sono possibili due strategie

→ usare la completezza dei numeri reali (vedi secondo semestre)

→ usare l'ordinamento (carabinieri per serie)

Lemma (Carabinieri per serie) Siano a_n, b_n, c_n tre succ. tali che
$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{defin.} \quad (\text{nessuna ipotesi di segno})$$

Supponiamo che $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano.

Allora $\sum b_n$ converge.

Dim Step 1 $\sum (c_n - a_n)$ converge (differenza di due serie convergenti)

Step 2 $\sum (b_n - a_n)$ converge

In fatti

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$$

e quindi la conv. segue dal confronto a 2 tra serie a termini ≥ 0

Step 3 $\sum b_n$ converge

$\sum b_n = \sum [a_n + (b_n - a_n)]$ quindi è somma di due serie convergenti ☺

Dim. assoluta convergenza Basta osservare che

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

e le due laterali convergono.

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ (un giorno la somma sarà $-\log 2$)

Non converge assolutamente perché con i val. assol. diventa $\sum \frac{1}{n}$

Però converge per Leibnitz con

$$d_n = \frac{1}{n} \quad (d_n \geq 0, \text{decresc.}, d_n \rightarrow 0).$$

Allo stesso modo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$

→ converge assolutamente $\Leftrightarrow a > 1$

→ converge $\Leftrightarrow a > 0$ (Leibnitz con $d_n = \frac{1}{n^a}$)

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+5}{n^4-3n+8}$

Volendo usare Leibnitz occorre dimostrare la decrescenza 😞

Più comodo è usare l'assol. conv., che è vera per confronto asintotico con $\frac{1}{n^2}$.

— 0 — 0 —