

Esercizio 1 $f(x) = \tan x$ Taylor con $n=5$ (o $n=6$)

1° modo: scomporre derivate

$$\text{2° modo: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^{-1}}_{(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots}$$

$$= (\dots) \left(\underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}_{-t} + \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{+t^2} + o(x^5) \right)$$

ora moltiplico e salvo i termini di grado ≤ 6 .

3° modo: lo sviluppo sarà $\tan x = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$

Ora sappiamo che $\arctan(\tan x) = x$

Sviluppo a sx

$$\arctan(\tan x) = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + o(x^5)$$

$$= x + ax^3 + bx^5 - \frac{1}{3} (\dots)^3 + \frac{1}{5} (\dots)^5 + o(x^5)$$

$$= \cancel{x} + ax^3 + bx^5 - \frac{1}{3} (x^3 + 3ax^5) + \frac{1}{5} x^5 + o(x^5) = \cancel{x}$$

Impongo che i coeff. di x^3 e x^5 se ne vadano

$$a = \frac{1}{3}$$

$$b - a + \frac{1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = a - \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

Esercizio 2 Ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} - e$$

$$e^{\frac{1}{x} \log(1+x)} - e = e^{\frac{1}{x} (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} - e$$

$$= e^{1 - \frac{x}{2} + o(x)} - e$$

$$= e \cdot e^{-\frac{x}{2} + o(x)} - e = e \left(e^{\overbrace{-\frac{x}{2} + o(x)}^{t \rightarrow 0}} - 1 \right)$$

$$= e \left(\cancel{1} - \frac{x}{2} + o(x) - \cancel{1} \right) = -\frac{e}{2} x + o(x)$$

Esercizio 3 $m^2 \left(1 - \operatorname{arctan} \frac{1}{m} \right) \quad + \infty \quad (1-1)$

Posso porre $x = \frac{1}{m}$ e passare alle funzioni. In alternativa sviluppo subito

$$m^2 \left(1 - \operatorname{arctan} \frac{1}{m} \right) = m^2 \left(1 - m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{3} \frac{1}{m^3} + o\left(\frac{1}{m^4}\right) \right) \right)$$

$\uparrow$ $t \rightarrow 0$ $\uparrow$ $t = \frac{1}{m}$ $t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^4)$

$$= m^2 \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{3m^2} + o\left(\frac{1}{m^3}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{m}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \quad \ddot{\circ}$$

Esercizio 3 $\frac{2 \cos m - 2 + m^2}{m^4} \quad [\text{Il limite fa banalmente } 0]$

$$\frac{2 \left(1 - \frac{m^2}{2} + \frac{m^4}{24} \right) - 2 + m^2}{m^4} = \frac{\cancel{2} - \cancel{m^2} + \frac{m^4}{12} - \cancel{2} + \cancel{m^2}}{m^4} \rightarrow \frac{1}{12}$$

NO!! NO!! $m \rightarrow \infty$, quindi NON posso sviluppare

Esercizio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin^2 x) - x^2}{\sin^2(\tan^2 x) - x^5} = -\frac{5}{6}$

Vedo che al denom. $\sin^2(\tan^2 x) \sim x^4$, e $x^5 = o(x^4)$

Denominatore = $x^4 + o(x^4)$ (qui basta sapere gli sviluppi)

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \log(1 + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) &= \underbrace{x^2 - \frac{1}{3}x^4}_t - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\ \log(1+t) &\quad -\frac{1}{2}t^2 \\ &= x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Numeratore: $-\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$.

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} - 2}{1 - \cos x + x^4} = -\frac{4}{9}$

Denominatore = $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \binom{\frac{1}{3}}{1} x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!} x^2 + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

Numeratore = ~~$1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$~~ + ~~$1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$~~ - 2 + $o(x^2) = -\frac{2}{9}x^2 + o(x^2)$

Esercizio 6

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

parte principale per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n} &= \sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right) = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 7

$$f(x) = \frac{3+x^2}{2+x}$$

Taylor con $x_0=1$ e $n=3$

$$f(1+t) = \frac{3+(1+t)^2}{2+1+t} = \frac{4+2t+t^2}{3+t} = \frac{1}{3} (4+2t+t^2) \left(1+\frac{t}{3}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} (4+2t+t^2) \left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27} + o(t^3)\right) = \text{moltiplica e salvo solo...}$$

$$1 - t + t^2 - t^3$$

Esercizio 8

Parte principale di

$$\frac{n^3+5}{n^3-2} - \sqrt[n]{4}$$

$$1-1=0$$

$$\left(1+\frac{5}{n^3}\right) \left(1-\frac{2}{n^3}\right)^{-1} - e^{\frac{1}{n} \log 4} = \cancel{1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1} - \frac{1}{n} \log 4 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

↑
solo almeno
 n^3

$$= -\frac{\log 4}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

— 0 — 0 —