

FUNZIONI IPERBOLICHEPer ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

↑
sempre $\neq 0$

Simmetria

$\sinh$ è DISPARI così come $\tanh x$
 $\cosh$ è PARI

Nessuna di queste funzioni è PERIODICA

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty$$

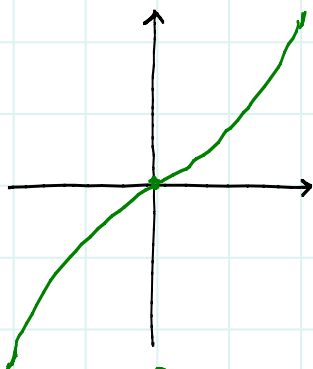
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1$$

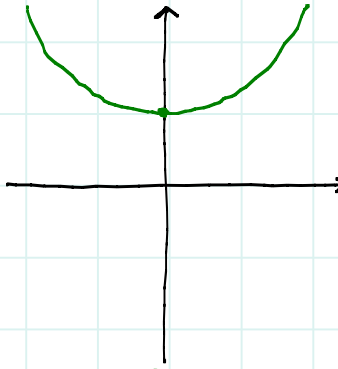
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$$

↑
è come fosse
 $\frac{e^x}{e^x}$

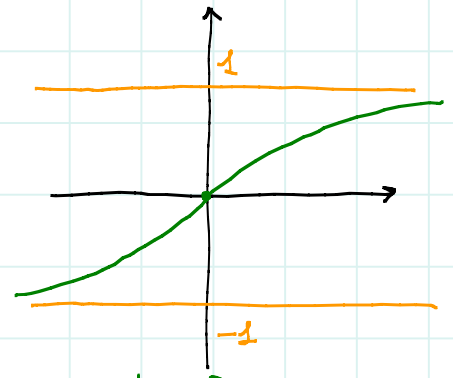
Grafici $\sinh x$

(strett. cresc.)

↑
 e^x cresce
 e^{-x} decresce

 $\cosh x$

strett. cresc. sui
positivi

 $\tanh x$

strett. cresc.
ovunque

Quadrati

$$\sinh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$$

Se le sommo:

$$\sinh^2 x + \cosh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

Forme duplicazione
della trigonometria
iperbolica

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

Sottraendo i quadrati:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Relazione fondamentale

Oss. Si possono fare allo stesso modo

→ le formule di addizione / sottrazione

→ le formule product to sum

→ le formule sum to product

Derivate

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

↑
segno +

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

Taylor

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Oss. $\sin x$ si prende la parte dispari di e^x

$\cos x$ " " pari "

Ovviamente

$$\sin x + \cos x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Due possibili dim. del Taylor

① Calcolo le derivate in 0 e scopro che sono 0-1 alternati

② Lo deduco da e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

poi sommo o sottraggo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \dots$$

Funzioni inverse

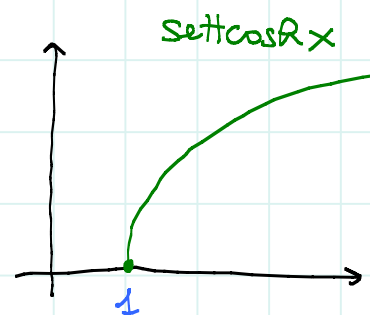
① $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è bigettiva, quindi ha inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che si chiama

Sett $\sin x$

↑
settore

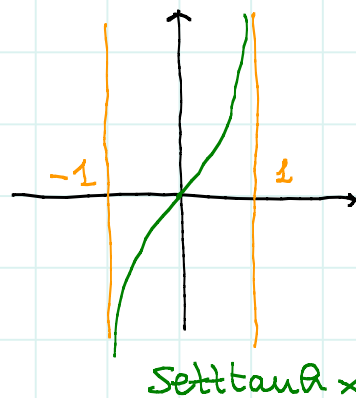
② $\cos: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è bigettiva, quindi

Sett $\cos: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



[3] $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ è bigettiva, quindi

$$\operatorname{Settanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$



Esercizio Trovare formula esplicita per $\operatorname{Settcoth} x$

Devo risolvere $\cosh x = y$, cioè dato $y \geq 1$ devo trovare l'unico $x \geq 0$ che risolve l'equazione

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \rightsquigarrow e^x + e^{-x} = 2y \rightsquigarrow \text{pongo } e^x = z \text{ e diventa}$$

$$z + \frac{1}{z} = 2y, \text{ cioè } z^2 - 2yz + 1 = 0 \rightsquigarrow \text{risolvo in } z$$

$$z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Questo è ≥ 0 perché $y \geq 1$:)

Osservo che i due valori di z sono positivi, e sono uno ≥ 1 e uno ≤ 1 (il loro prodotto è = al termine noto dell'eq., cioè 1).

Dovendo essere $z = e^x$ con $x \geq 0$, prendo lo z più grande, quindi

$$y + \sqrt{y^2 - 1}$$

Per trovare x basta fare il logaritmo.

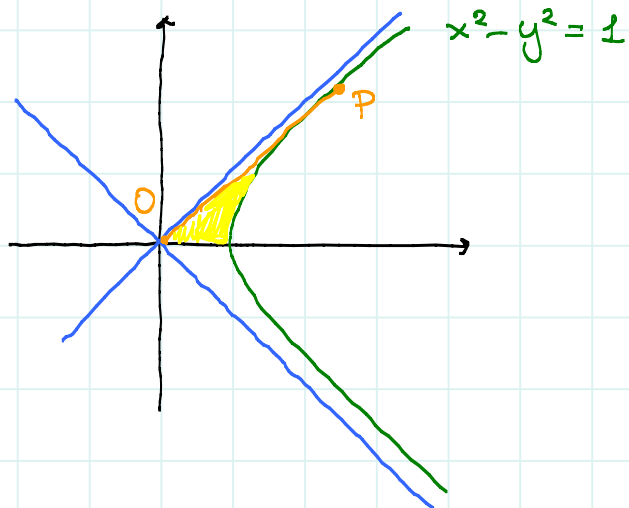
Conclusione:

$$\operatorname{Settcoth} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

Oss. Se usavo l'altro z , cioè $z = y - \sqrt{y^2 - 1}$, veniva la stessa cosa con il segno cambiato.

Questo perché il prodotto dei due z è 1, e quindi la somma dei loro log è 0.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA



Fatto misterioso : per ogni $\alpha \geq 0$ esiste un p.to P sulla parte alta dell'iperbole tale che il settore compreso tra la retta OP e il ramo di iperbole abbia area $\frac{\alpha}{2}$

Allora le coordinate di P sono

$$(\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$

Oss. La relazione fondamentale è l'appartenenza all'iperbole

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$$

Finestra sul futuro

Le rotazioni iperboliche saranno tra le trasformazioni ortogonali rispetto ad un prodotto scalare di segnatura $(1, 1)$.

Seconda finestra

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\cos(ix) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \cosh(x)$$