

DERIVATE Setting : $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

Supporremo sempre x_0 interno a D cioè

$$\exists \tau > 0 \text{ t.c. } (x_0 - \tau, x_0 + \tau) \subseteq D$$

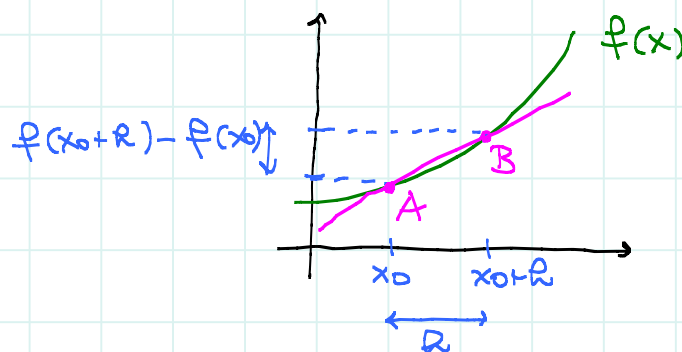
(oggi basterebbe $x_0 \in D$ e p.to di accumulazione)

Def. (RAPPORTO INCREMENTALE : DIFFERENCE QUOTIENT)

$$\frac{f(x_0 + \tau) - f(x_0)}{\tau}$$

definito almeno $\forall \tau \in (-\tau, \tau) \setminus \{0\}$

Geometricamente è il rapporto tra l'incremento della x ($x_0 + \tau - x_0$) e il corrispondente incremento della y



Coincide con il coeff. angolare della retta AB.

Def. (Derivata) Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste ed è reale il

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \tau) - f(x_0)}{\tau}$$

In tal caso il limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con una notazione a scelta tra

$$f'(x_0)$$

$$\dot{f}(x_0)$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

Geometricamente : $f'(x_0)$ è il coeff. ang. della retta tangente al grafico nel p.to $(x_0, f(x_0))$.

Tale retta ha equaz.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Def. (Differenziale) Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste un numero reale α tale

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Prop. Se f è diff. in x_0 , allora α è unico.

Dim. Supponiamo ce ne siano 2, cioè α_1 e α_2 . Allora

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha_1 h + o(h)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha_2 h + o(h)$$

Sottraendo ottengo

$$\cancel{f(x_0)} + \alpha_1 h + o(h) = \cancel{f(x_0)} + \alpha_2 h + o(h)$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2)h = o(h)$$

Ho usato che $o(h) - o(h) = o(h)$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_0$$

Ma allora $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

Teorema Solito setting.

Allora f è derivabile in x_0 se e solo se f è diff. in x_0

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

Dim. Derivabile $\Rightarrow$ Differenziabile

H_p : esiste $f'(x_0)$ come limite del rapp. incr.

Th : vale la def. di diff. con $\alpha = f'(x_0)$, cioè

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

il che è equiv. a

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \rightarrow 0$$

↓
 $f'(x_0) - f'(x_0)$

Diff. $\Rightarrow$ Deriv Hp: $f(x_0+h) = f(x_0) + d h + o(h)$
Th: $f'(x_0) = d$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d h + o(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} d + \frac{o(h)}{h} = d.$$

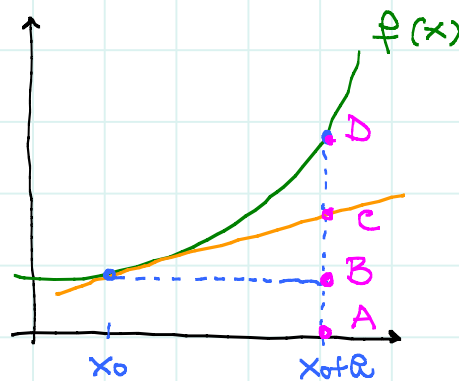
↑
uso
Hp
— o — o —

Finestra sul futuro Da AM2 in poi, le due definizioni non sono più equivalenti, e per molte cose il differenziale è meglio.

Interpretazione geometrica

$$f(x_0+h) = f(x_0) + d h + o(h)$$

$$AD = AB + BC + CD$$



Questo ci dice che $f(x_0+h)$ è somma di

- un termine costante $f(x_0)$
- un termine lineare in h BC (se dimesso h , dimessa BC)
- un termine che tende a 0 per $h \rightarrow 0$, ma più velocemente.

— o — o —

Esempio 1 $f(x) = x^2$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

2° modo $f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = x_0^2 + \boxed{2x_0h} + h^2$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $f(x_0) \quad dh \quad o(h)$

Esempio 2 $f(x) = x^3$

2° modo $f(x_0+h) = (x_0+h)^3 = x_0^3 + \boxed{3x_0^2h} + 3x_0h^2 + h^3$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \quad \uparrow$
 $f(x_0) \quad dh \quad \quad \quad o(h)$

Oss. Allo stesso modo faccio $f(x) = x^n$ con $n \geq 1$ intero

Esempio 3 $f(x) = e^x$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \boxed{\frac{e^h - 1}{h}} = e^{x_0}$$

$\downarrow$
1

2° modo $f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h$ uso sviluppo

$$= e^{x_0} (1 + h + o(h))$$
$$= e^{x_0} + \underset{\uparrow dh}{e^{x_0} \cdot h} + o(h)$$

Esempio 4 $f(x) = \log x$

2° modo $f(x_0+h) = \log(x_0+h) = \log\left[x_0\left(1+\frac{h}{x_0}\right)\right]$

$$= \log x_0 + \log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \\ \text{con } t = \frac{h}{x_0}$$

$$= \log x_0 + \frac{h}{x_0} + o\left(\frac{h}{x_0}\right)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x_0)$ $\frac{1}{x_0} \cdot h$ $o(h)$
 $\uparrow$
 h

Esempio 5 $f(x) = \sin x$

1° modo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= \dots \\ \sin(x_0+h) &= \dots \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \cos x_0 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_1 + \sin x_0 \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h^2}}_{-\frac{1}{2}} h \right\} = \cos x_0$$

2° modo $f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$

$$= \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$$

$$= \sin x_0 + \cos x_0 \cdot h + o(h)$$

$\uparrow$
 h

Morale Alla fine

- limiti notevoli
 - sviluppi
 - derivate delle funzioni elementari
- Sono 3 facce della stessa medaglia.

Teorema f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

Dim $f(x_0 + \alpha) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha}}_{\substack{\downarrow \\ f'(x_0)}} \cdot \underbrace{\alpha}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$

Quindi $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x_0 + \alpha) = f(x_0)$

Con il cambio di variabili $x = x_0 + \alpha$ diventa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{☺}$$

— o — o —