

Linguaggio degli infinitesimi: SIMBOLI DI LANDAU

- o piccolo utilissimo per fare i limiti
- O grande poco utile per i limiti
- $\sim$ equivalenza asintotica pericolosissima per i limiti

Def. di o piccolo Setting: $D \subseteq \mathbb{R}$ x_0 p.to in cui fare i limiti
(può essere $\pm\infty$, 5 , 7^- , 8^+)

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni

Si dice che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $\omega: D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(x)\omega(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0$$

Brutalmente: $f = g$ per qualcosa che tende a 0.

Ancora meglio: se g tende a 0, allora f tende a 0 "di più",
cioè " f batte g nella velocità con cui tende a 0"

Def. quasi equivalente Supponiamo di poter dividere per $g(x)$
(cioè $g(x) \neq 0$ almeno vicino a x_0).

Allora $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Def. di equivalenza asintotica Si dice che

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se ... tutto come sopra ... e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 1$$

Brutale: f e g
"parruggiano"

Def. di O grande

... tutto come sopra... $\omega(x)$ limitata in un intorno di x_0 (Brutale: f non perde da g)

Esempio 1 $x^3 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$

1° modo: $x^3 = x \cdot x^2$ e $x^2 \rightarrow 0$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 f g ω

2° modo: def. quasi equiv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$

$\nwarrow$ $\nearrow$
 f g

Fatto generale $x^a = o(x^b)$ per $x \rightarrow 0$ se e solo se $a > b$

$$x^a = x^b \cdot x^{a-b}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 f g $\omega \leftarrow \text{tende a } 0 \Leftrightarrow a > b$

Oss. $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \rightarrow 0$ ma nessuno dei due tende a 0.

Esempio 2 $\sin(x^2) \cdot \arctan x = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

Posso usare def. quasi equivalente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \arctan x}{x^2} = 0$$

$\nwarrow$
 $\omega(x) \rightarrow 1$

$$\omega(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \arctan x$$

PROPRIETÀ DI O PICCOLO

Setting come sopra. Tutto per $x \rightarrow x_0$.

Supponiamo che

$$f_1(x) = o(g(x))$$

$$f_2(x) = o(g(x))$$

SOMMA/DIFFERENZA

$$f_1(x) \pm f_2(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Dim $f_1(x) = g(x) \cdot w_1(x)$

$$f_2(x) = g(x) \cdot w_2(x)$$

$$f_1(x) \pm f_2(x) = g(x) \cdot [w_1(x) \pm w_2(x)]$$

$w_3(x) \rightarrow 0$ per somma/diff.

MULTIPLO

$$\lambda f_1(x) = o(g(x))$$

Dim $\lambda f_1(x) = \lambda g(x) \cdot w_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{\lambda w_1(x)}_{w_3(x) \rightarrow 0}$

Voleudo è vero pure che $\lambda f_1(x) = o(\lambda g(x))$.

PRODOTTO

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x)^2)$$

Dim $f_1(x) \cdot f_2(x) = g(x) w_1(x) \cdot g(x) w_2(x)$
 $= g(x)^2 \cdot \underbrace{w_1(x) \cdot w_2(x)}_{w_3(x) \rightarrow 0 \cdot 0 = 0}$

QUOZIENTE

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \text{NULLA DI FURBO}$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} w_1(x)}{\cancel{g(x)} w_2(x)} \quad \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{BOH} \right]$$

Brutale: f_1 batte g , f_2 batte g , ma non so nulla di come finisce tra f_1 e f_2 .

TRANSITIVITÀ

Se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(R(x))$, allora
 $f(x) = o(R(x))$

Dim $f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$ $g(x) = R(x) \cdot \omega_2(x)$

Quindi $f(x) = R(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x) \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \rightarrow 0 \cdot 0}$

Riassunto

$$o(g) \pm o(g) = o(g)$$

$$\lambda o(g) = o(g)$$

$$o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{nulla di furbo}$$

$$o(o(g)) = o(g)$$

Esempio $\sin(2x) \cdot \arctan x = o(x)$ (tutto per $x \rightarrow 0$)
 $\sin(2x) \cdot \arctan^2 x = o(x)$ } ok entrambe: se divido,
 $\sin(2x) \cdot \arctan^2 x = o(x^2)$ } il limite viene 0
 $\sin(2x) \cdot \arctan^2 x = o(x^3)$ NO (se divido e faccio
più forte della seconda, cioè il limite viene 2)
la implica (battere x^2 è più difficile
che battere x)

COMPOSIZIONI

Per $x \rightarrow 0$.

Supponiamo $f(x) = o(x^a)$ per $x \rightarrow 0$ ($a > 0$)

Allora $f(x^3) = o(x^{3a})$ per $x \rightarrow 0$

Dim $f(x) = x^a \cdot \omega(x)$ con $\omega(x) \rightarrow 0$

$$f(x^3) = x^{3a} \cdot \underbrace{\omega(x^3)}_{\omega_1(x) \rightarrow 0}$$

$\omega_1(x) \rightarrow 0$ per cambio variabili $y = x^3$

$$[f(x)]^3 = o(x^{3a}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad [f(x)]^3 = [x^a \cdot \omega(x)]^3 = x^{3a} \cdot \underbrace{\omega(x)^3}_{\omega_1(x) \rightarrow 0} \quad \ddot{\smile}$$

$$f(\arctan x) = o(x^a) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad f(\arctan x) &= (\arctan x)^a \omega(\arctan x) \\ &= x^a \underbrace{\frac{(\arctan x)^a}{x^a}}_{\omega_1(x) \rightarrow 1 \cdot 0} \cdot \omega(\arctan x) \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$

$$\arctan(f(x)) = o(x^a) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad \arctan(f(x)) = x^a \underbrace{\frac{\arctan(f(x))}{x^a}}_{\omega_1(x)}$$

$$\omega_1(x) = \underbrace{\frac{\arctan(f(x))}{f(x)}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{f(x)}{x^a}}_{\downarrow 0 \text{ perché è l' } \omega \text{ di } f!!} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

Oss. La dim. di sopra funziona se posso dividere per f .

— 0 — 0 —