

SOTTOSUCCESSIONI (Come dimostrare che un limite non esiste)

Sottosucc = prendere solo alcuni termini della succ.

$$\boxed{a_0} \quad a_1 \quad \boxed{a_2} \quad \boxed{a_3} \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad \boxed{a_7} \quad a_8 \quad \dots$$

Più formalmente: sia n_k una succ. strett. cresc. di num. naturali
Una sottosucc. è sempl. l'applicazione $k \rightarrow a_{n_k}$

Esempi

a_{2k} = s. succ. termini di indice pari : $a_0, a_2, a_4, a_6, \dots$

a_{2k+1} = " dispari : $a_1, a_3, a_5, a_7, \dots$

a_{k^2} = termini il cui indice è un $\square$: $a_0, a_1, a_4, a_9, \dots$

Def. più generale: ammettere semplicemente che $n_k \rightarrow +\infty$, anche senza essere strett. monotona

Teorema Sia α_n una succ.

Supponiamo che $a_m \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (primi 3 tipi)

Allora ogni sua s. succ. tende allo stesso l.

Dim Qualunque cosa faccia con definitivamente ($a_n \geq M$, $a_n \leq M$, $|a_n - L| \leq \varepsilon$) lo fa definitivamente pure la s. succ.

Oss. Se m_k è una succ. strett. cresc. di naturali, allora

$$m_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{facile inclusions})$$

Di conseguenza, se $a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$, allora anche

$$a_{m_k} \geq M \quad \forall k \geq m_0$$

(se $k \geq m_0$, anche $m_k \geq m_0$)

Oss. Se a_n non ha limite (tipo ④), le sue s.succ. possono o no avere limite.

Esempio classico

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_{2k} \rightarrow 1$$

$$a_{2k+1} \rightarrow -1$$

$$a_{k^2} \text{ non ha limite} \quad a_{k!} \rightarrow 1$$

Come dimostro che a_n non ha limite?

(Questo è in realtà
un se e solo se)

Basta trovare due sottosuccessioni che hanno due limiti diversi!

Dim Se per assurdo $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora tutte le s.succ. avrebbero lo stesso limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Oss. Questo è comodo rispetto a negare la definizione.

Cosa vuol dire che a_n ha limite reale?

$$\exists l \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad |l - a_n| \leq \varepsilon$$

La negazione sarebbe

$$\forall l \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\forall m_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq m_0}_{\text{frequentemente}} \quad |l - a_n| > \varepsilon$$

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + (-1)^n n^5$ NON ha limite

$$a_{2k} = (2k)^3 + (2k)^5 \rightarrow +\infty$$

(raccolgo k^5)

$$a_{2k+1} = (2k+1)^3 - (2k+1)^5 \rightarrow -\infty$$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 + (-1)^n n^3 = +\infty$

$$n^5 + (-1)^n n^3 = \underbrace{n^5}_{\rightarrow +\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2}}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$\boxed{-\frac{1}{n^2}} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0$

Esempio 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{7} n\right)$

Brutta copia: faccio in modo che $\sin = 0 \leadsto \frac{\pi}{7} n = 2k\pi \leadsto n = 14k$

faccio in modo che $\sin = 1$

$$\leadsto \frac{\pi}{7} n = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leadsto 2\pi n = 7\pi + 14k\pi$$

$$\leadsto 2n = 14k + 7$$

e questo non è possibile

faccio in modo che $\sin = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$\frac{\pi}{7} n = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \leadsto n = 1 + 14k$$

Bella copia: $a_{14k} = \sin\left(\frac{\pi}{7} \cdot 14k\right) = \sin(2\pi k) = 0 \rightarrow 0$

$$a_{14k+1} = \sin\left(\frac{\pi}{7} + 2k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \neq 0$$

Come dimostrare che $\lim_{x \rightarrow \text{CANE}} f(x)$ non esiste?

CANE: $+\infty, -\infty$
 x_0, x_0^+, x_0^-

Basta che trovi (per ora è cond. suff., ma in realtà è $\Leftrightarrow$)
due succ.

$$a_n \rightarrow \text{CANE}$$

$$b_n \rightarrow \text{CANE}$$

tali che

$$f(a_n) \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$f(b_n) \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$l_1 \neq l_2$$

Dim. Se per assurdo $\lim_{x \rightarrow \text{CANE}} f(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $f(a_n)$ e

$f(b_n)$ tenderebbero a quello stesso l (è il criterio
funzionari $\rightarrow$ succ. ponendo $x = a_n$ e $x = b_n$)

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ non esiste

$$\text{Usa } a_n = 2\pi n \rightarrow +\infty \text{ e } \sin(a_n) = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \rightarrow +\infty \text{ e } \sin(b_n) = 1 \rightarrow 1$$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ non esiste

Brutta: posso avere $\cos = 1$? $\frac{1}{x^2} = 2k\pi \leadsto x = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \rightarrow 0^+$

Posso avere $\cos = 0$? $\frac{1}{x^2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leadsto x = \frac{1}{\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}} \rightarrow 0^+$

Bella copia: considero le due succ.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \rightarrow 0^+$$

$$\cos\left(\frac{1}{a_n^2}\right) = \cos(2\pi n) \rightarrow 1$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \rightarrow 0^+$$

$$\cos\left(\frac{1}{b_n^2}\right) = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 0$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x) = +\infty$

$$\boxed{x(2 + \sin x)} \geq \boxed{x}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $+\infty \quad \quad +\infty$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x(1 + \sin x)}_{f(x)}$ non esiste

$$a_n = \pi n \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(a_n) = a_n = \pi n \rightarrow +\infty$$

$$b_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) = 0 \rightarrow 0$$

Se il limite fosse stato per $x \rightarrow -\infty$ avrei usato

$$a_n = -\pi n \rightarrow -\infty$$

$$b_n = \frac{3\pi}{2} - 2n\pi \rightarrow -\infty$$

Esempio 5 $\underbrace{\left(2 + \cos\left(\frac{\pi}{22} n\right)\right)^n}_{a_n}$ non esiste

$$a_{44k} = \left(2 + \cos(2k\pi)\right)^{44k} = 3^{44k} \rightarrow +\infty$$

Vorrei tanto $\cos = -1 \leadsto \frac{\pi}{22} n = \pi + 2k\pi \leadsto n = 22 + 44k$

$$a_{44k+22} = (2 + \cos(\pi + 2k\pi))^{44k+22} = 1 \rightarrow 1$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

$$\underbrace{-\sin \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} \leq \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\downarrow 0}$$

Ho usato che $\sin \frac{1}{x} > 0$ quando x è abbastanza grande.
 — 0 — 0 —