

CRITERIO FUNZIONI $\rightarrow$ Succ

(I limiti di funzione aiutano i Lim. di succ.)

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} \quad (+\infty \cdot 0)$

$$n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{con } x \rightarrow 0 \text{ e quindi fa } 1$$

$\uparrow$
 posso
 $x = \frac{1}{n}$

Lemma Sia a_n una successione

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Supponiamo che

(i) $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ definitivamente

(ii) $a_n \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $f(a_n) \rightarrow l$ (stesso l).

Dim. nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $l \in \mathbb{R}$

Devo dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, definitivamente si ha che $|f(a_n) - l| \leq \varepsilon$

$\rightarrow$ Mi viene dato $\varepsilon > 0$

$\rightarrow$ Per l'ipotesi (iii) sappiamo che

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$\rightarrow$ Ora sappiamo che definitivamente si ha che

$$a_n \in D \setminus \{x_0\} \quad (\text{per l'ipotesi (i)})$$

$$a_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad (\text{per l'ipotesi (ii)})$$

$\rightarrow$ Quindi definitivamente $|f(a_n) - l| \leq \varepsilon \quad \ddot{\smile}$

Esercizio 1 $n^2 \left(\cos \frac{2}{n} - 1 \right) \rightarrow -2$

$\frac{\cos\left(\frac{2}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n^2}}$ Pongo $x = \frac{1}{n}$ e diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\cos(2x) - 1}{(2x)^2}} \cdot 4 = -2$$

$\downarrow$
 $-\frac{1}{2} \quad (y=2x)$

Esercizio 2 $n [\log(m+33) - \log(m+7)] \rightarrow +\infty \quad (+\infty - \infty)$

$$= n \log\left(\frac{m+33}{m+7}\right) = n \log\left(1 + \frac{26}{m+7}\right)$$

$$= n \frac{\boxed{\log\left(1 + \frac{26}{m+7}\right)}}{\frac{26}{m+7}} \cdot \frac{26}{m+7} \rightarrow 26$$

$\downarrow$
 $1 \quad x = \frac{26}{m+7} \rightarrow 0$

Esercizio 3 $n (\sqrt[n]{20} - 1) \rightarrow \log 20$

$$n (\sqrt[n]{20} - 1) = n (20^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{20^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \log 20 \quad (x = \frac{1}{n})$$

Esercizio 4 $n (\sqrt[n]{7} - \sqrt[n]{5}) \rightarrow \log \frac{7}{5}$

$$n (\sqrt[n]{7} - 1) - n (\sqrt[n]{5} - 1) \rightarrow \log 7 - \log 5 = \log \frac{7}{5}$$

Esercizio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+x^2) + e^x - \cos x}{\arctan(3x) + \arcsin(x^2)} = 1$

Faccio $+1-1$ al numeratore e raccolgo x

$$\frac{\boxed{\frac{\sin(2x+x^2)}{x}} + \boxed{\frac{e^x-1}{x}} + \boxed{\frac{1-\cos x}{x}}}{\boxed{\frac{\arctan(3x)}{x}} + \boxed{\frac{\arcsin(x^2)}{x}}} \rightarrow \frac{3}{3} = 1$$

$\uparrow 2$ $\uparrow 1$ $\uparrow 0$
 $\downarrow 3$ $\downarrow 0$

Esaminiamo separatamente i 5 limiti

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot x \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\arcsin(x^2)}{x} = \frac{\arcsin(x^2)}{x^2} \cdot x \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\sin(2x+x^2)}{x} = \frac{\sin(2x+x^2)}{2x+x^2} \cdot \frac{2x+x^2}{x} \rightarrow 1 \cdot (2+x) \rightarrow 2$$

$\downarrow 1$ $= 2+x \rightarrow 2$

Esempio 6 $\frac{n}{\log n} (\sqrt[n]{n} - 1)$ $\frac{\infty}{\infty} \cdot (1-1)$

BASI ED ESPONENTI STRANI = e ^{ALLA}

CANE ^{GATTO} = e ^{GATTO · log CANE}

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n}$$

$$\frac{n}{\log n} (e^{\frac{1}{n} \log n} - 1) = \frac{e^{\frac{1}{n} \log n} - 1}{\frac{\log n}{n}} \rightarrow 1 \quad \left(x = \frac{\log n}{n} \rightarrow 0 \right)$$

Esempio 7 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ $1^{\frac{+\infty}{1}}$

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{1}{\sin^2 x} \log(\cos x)} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Quindi basta fare il limite dell'esponente

$$\frac{\log(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $-\frac{1}{2}$ 1
 $y = \cos x - 1 \rightarrow 0$

Esempio 8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x^3}{1 - \cos^3 x^2} = 0$

$$\frac{1 - \cos^2(x^3)}{1 - \cos^3(x^2)} = \frac{1 - \cos(x^3)}{1 - \cos(x^2)} \cdot \frac{1 + \cos(x^3)}{1 + \cos(x^2) + \cos^2(x^2)}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 $\frac{2}{3}$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

In un angolo faccio il primo pezzo

$$\frac{1 - \cos(x^3)}{1 - \cos(x^2)} = \frac{1 - \cos(x^3)}{x^6} \times^6 \frac{x^4}{1 - \cos(x^2)} \cdot \frac{1}{x^4} \rightarrow 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{1}{2}$ 2

Esempio 9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x^3}{1 - \cos^3 x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO : $f(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow |f(x)| \rightarrow 0$
 $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$

Esempio 10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{x}$

$$\frac{\log(1 + 3^x)}{x} = \frac{\log(1 + 3^x)}{3^x} \cdot \frac{3^x}{x}$$

$\downarrow$
 1

NO!! $y = 3^x$ NON TENDE A 0!

Brutal mode: $\log(1+3^x) \sim \log(3^x) \sim x \log 3$

Rigorous: $\frac{\log(3^x(1+\frac{1}{3^x}))}{x} = \frac{\log(3^x) + \log(1+\frac{1}{3^x})}{x}$

$$= \frac{x \log 3 + \log(1+\frac{1}{3^x})}{x} = \log 3 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow \frac{1}{\infty}} \underbrace{\log(1+\frac{1}{3^x})}_{\uparrow 0 \atop +\frac{1}{\infty}} \rightarrow \log 3$$

— 0 — 0 —