

LIMITI DI FUNZIONISetting: $D \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Andremo a definire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ognuno di questi ha 4 opzioni: $l \in \mathbb{R}$, $+\infty$, $-\infty$, **N.E.**

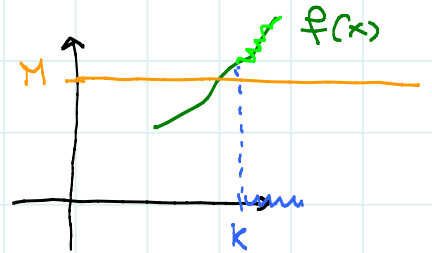
↑ nessuno dei precedenti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Prerequisito: D deve essere non limitato superiormente.
cioè $\sup D = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} f(x) \geq M \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$$

↑ anche enorme ↑ dipende da M : più alto M più k va a dx

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$$

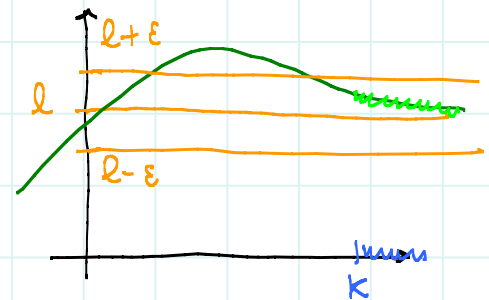
↑ anche molto negativo



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D \cap [k, +\infty)$$

↑ anche molto vicino a 0



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

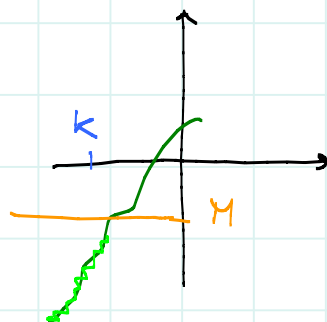
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ se}$$



$$\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$$

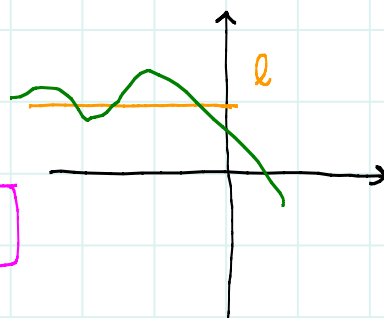
↑ anche enormi ↑ se also M, un aspetto che k vada verso sx.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ se}$$



$$\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ se}$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k]$$

Solite varianti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^+ \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k] \quad l < f(x) \leq l + \varepsilon$$

↑ = obbligatorie
↑ = trattabili

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^- \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \cap (-\infty, k) \quad l - \varepsilon \leq f(x) < l$$

Prerequisito per fare $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

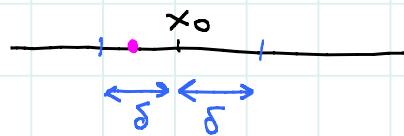
$$\inf D = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Prerequisito su D : x_0 p.to di accumulazione di D
cioè

$$\forall \delta > 0 \quad (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Brutale: in ogni intervallo centrato
in x_0 c'è almeno un p.to di
 D diverso da x_0 stesso.

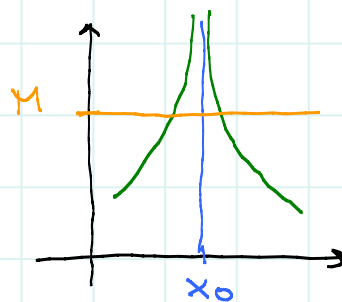


Achtung! La condizione NON è " $x_0 \in D$ " e non è " x_0 nella chiusura di D "

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M$$

$$\forall x \in (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\}$$



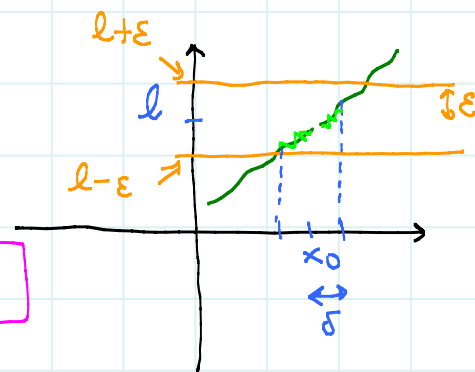
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{se}$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in (D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \setminus \{x_0\}$$

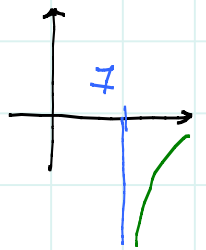


Brutale: gli ε interessanti sono quelli vicini a 0
Più ε diventa piccolo, più δ diventa piccolo (vicino a 0)

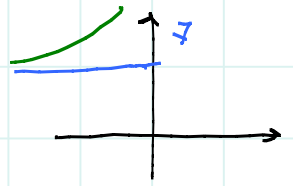
Quanto vale $f(x_0)$? CHI SE NE FREGA! Il limite è una previsione
di quello che dovrebbe succedere in x_0 sulla
base di quello che è successo lì vicino.

Varianti Cosa vuol dire che $\lim_{x \rightarrow \gamma^+} f(x) = -\infty$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta] f(x) \leq M$$



Cosa vuol dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \gamma^+$



$$\forall \epsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \forall x \in D \cap (-\infty, K] \gamma < f(x) \leq \gamma + \epsilon$$

Cosa vuol dire $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 10^+$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap [8 - \delta, 8) 10 < f(x) \leq 10 + \epsilon$$

Def. Solito setting : $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo ora che $x_0 \in D$

• Se accade che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, allora f si dice CONTINUA in x_0 .

• f si dice continua in D se è continua in ogni p.to di D .

• Nota burocratica : se x_0 è isolato in D ($\exists \delta > 0 \ D \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = \{x_0\}$) allora per definizione f è continua gratis in x_0

— o — o —