

**FREQUENTEMENTE - DEFINITIVAMENTE** Sia  $P(n)$  un predicato con  $n \in \mathbb{N}$

Si dice che  $P(n)$  vale definitivamente se vale da un certo punto in poi, cioè

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } P(n) \text{ è vero } \forall n \geq m_0$$

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 P(n)$$

(Prima di  $m_0$  può essere vero o no)

Si dice che  $P(n)$  vale frequentemente se vale per infiniti valori di  $n$ .  
Stessa cosa è dire che

$$\forall m_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq m_0 \text{ t.c. } P(n) \text{ è vero}$$

Nota: le "infinito volte" possono anche essere "molto rare"

### SUCCESSIONE

Def. rigida Una succ. è una funzione  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Notazione Di solito, invece che  $f(n)$ , si usa come notazione  
 $x_n, y_n, a_n$

Def. più elastica Non si chiede che sia definita per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  
ma solo definitivamente

Esempi  $a_n = \frac{1}{n-4}$

↑  
ok, definita  
 $\forall n \geq 5$

$$b_n = \sqrt{n-2025}$$

↑  
ok, definita  
 $\forall n \geq 2025$

$$c_n = \sqrt{2025-n}$$

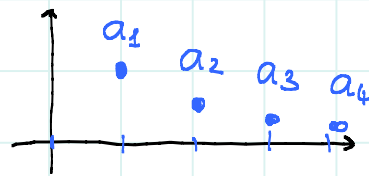
↑  
NON è una  
successione

## COME VISUALIZZARE UNA SUCCESSIONE

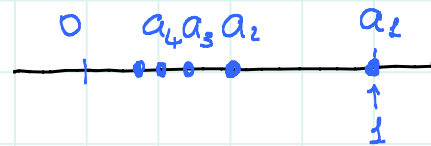
Almeno tre modi.

Pensiamo  $a_n = \frac{1}{n}$

(1) Come grafico: disegno nel piano i punti  $(n, a_n)$



(2) Come foto: disegno su una retta i punti  $a_n$  e gli metto il nome vicino



(3) Come video: prendo la retta e considero delle lampadine che restano accese 1 secondo, prima in  $a_1$ , poi in  $a_2$ , poi in  $a_3$ , e così via.

— o — o —

## LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Setting:  $a_n$  succ. di numeri reali

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{NON ESISTE} & \textcircled{4} \end{cases}$$

Def. di  $\textcircled{4}$  Nessuno dei precedenti

Def. di  $\textcircled{2}$  Si dice che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  (o equiv.  $a_n \rightarrow +\infty$ ) se

(si legge: il limite di  $a_n$  è  $+\infty$  oppure  $a_n$  tende a  $+\infty$ )

NON si legge: il limite tende a  $+\infty$ )



$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$  definitivamente

$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq M$

↑  
anche  
enorme

↑  
dipende da M  
(più M è grande e più  
n\_0 dovrà essere grande)

Def. di ③ Si dice che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$  ( $a_n \rightarrow -\infty$ ) se

$\forall M \in \mathbb{R}$   $a_n \leq M$  definitivamente  
 $\uparrow$   
anche molto negativo

Parentesi: la definizione si può dare in maniera barocca dicendo  
 $a_n \rightarrow -\infty$  se esiste  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  t.c.  $a_n \leq M \quad \forall n \geq g(M)$

(Moralmente:  $g$  associa ad ogni  $M \in \mathbb{R}$  l'inizio del definitivamente per cui  $a_n \leq M$ )

Def. di ④ Si dice che  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ ) se

$\forall \varepsilon > 0$   $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$  definitivamente  
 $\uparrow$   
anche molto vicini a 0  
equivalente a  
 $|a_n - l| \leq \varepsilon$   
 $\uparrow$  distanza tra  $a_n$  ed  $l$

Varianti di 1  $a_n \rightarrow l^+$   $a_n \rightarrow l^-$

Si dice che  $a_n \rightarrow l^+$  se  $\forall \varepsilon > 0$   $l < a_n \leq l + \varepsilon$  definitiv.  
 $\uparrow$   
STRETTO

Si dice che  $a_n \rightarrow l^-$  se  $\forall \varepsilon > 0$   $l - \varepsilon \leq a_n < l$  definitiv.  
 $\uparrow$   
STRETTO

Oss. In tutte le def. finora dove ho  $a_n \geq M$  o  $a_n \leq M$   
o  $a_n \leq l + \varepsilon$  o  $a_n \geq l - \varepsilon$  posso mettere disug.  
strette e non cambia nulla.

## Esempi a livello intuitivo

$$n^2 + 27 \rightarrow +\infty$$

$$3 - n^3 \rightarrow -\infty$$

$$\frac{1}{n-5} \rightarrow 0$$

$$(-1)^n = 1, -1, 1, -1, \dots \quad \text{NON HA LIMITE}$$

## Leggende metropolitane

**LM 1** Se  $a_n \rightarrow +\infty$ , allora  $a_n$  cresce definitivamente  
(FALSO:  $0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, \dots$  su di 2, giù di 1...  
"Penelope")

**LM 2** Se  $a_n \rightarrow 0$ , allora  $a_n \rightarrow 0^+$  oppure  $a_n \rightarrow 0^-$   
(FALSO:  $a_n \equiv 0$   $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ )

**LM 3** Se  $a_n \rightarrow 0^+$ , allora decresce definitivamente  
(FALSO:  $\frac{1}{\text{Penelope}}$ )

**LM 4** Se  $a_n$  è limitata, diciamo assume valori in  $[0, 1]$ , allora ha limite  
(FALSO:  $0, 1, 0, 1, 0, 1$ )

**Esempio 1**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$

Devo dimostrare che, per ogni  $M \in \mathbb{R}$  si ha  $n^2 \geq M$  definitivamente.

- Se  $M \leq 0$ , allora  $n^2 \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (quindi  $n_0 = 0$ )
- Se  $M > 0$ , allora  $n^2 \geq M$  per ogni  $n \geq \sqrt{M}$ , e questo è vero definitivamente (quindi basta scegliere  $n_0 \geq \sqrt{M}$ )  
 $\uparrow$   
criterio

Occhio: abbiamo usato questo per definire la radice

Più pulito: Se  $M > 0$  prendo un intero  $m_0 \geq M$  (questo esiste perché  $\sup \mathbb{N} = +\infty$ ) e già che ci sono anche  $m_0 \geq 1$ .

A questo punto

$$a_n = n^2 \geq m_0^2 \geq m_0 \geq M \quad \forall n \geq m_0$$

$\uparrow$   $n \geq m_0$  e  $\uparrow$   $m_0 \geq 1$

□ cresc. sui  
positivi

— o — o —