

Insiemi numerici

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Naturali

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$$

Interi (in tedesco ZAHLEN = numeri)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Razionali (quozienti)

$$\mathbb{R} = \text{reali}$$

Reali

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Complessi

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DEI REALI

I numeri reali sono una quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ dove $\mathbb{R}$ è un insieme e sono verificati 3 tipi di assioma:

→ assiomi ALGEBRICI

→ assiomi di ORDINAMENTO

→ assioma di CONTINUITÀ

ASSIOMI ALGEBRICI $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un CAMPO con almeno due elementi

Un campo è un ambiente con due operazioni $+$ e $\cdot$ con le usuali proprietà.

Nota bene: $+$ è "syntactic sugar" per scrivere

$$a + b$$

$$\text{add}(a, b)$$

$$\text{add}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

La proprietà associativa della somma sarebbe

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \text{add}(\text{add}(a, b), c) = \text{add}(a, \text{add}(b, c))$$

ASSIOMI DI ORDINAMENTO

$\geq$ è un ordinamento totale su $\mathbb{R}$
cioè

- (ord-1) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geq y \vee y \geq x$ (totale)
- (ord-2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq x$ (riflessiva)
- (ord-3) se $x \geq y$ e $y \geq z$, allora $x \geq z$ (transitiva)
- (ord-4) se $x \geq y$ e $y \geq x$, allora $x = y$ (antisimmetrica)

Due proprietà legano l'ordinamento alle operazioni

- (O-S) Se $x \geq y$, allora $x+z \geq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$
 $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} \quad x \geq y \Rightarrow x+z \geq y+z$

- (O-P) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, allora $xy \geq 0$

Dalla (O-P) seguono le seguenti due utilissime proprietà

- (OP1) Se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $xz \geq yz$

- (OP2) Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$
 $\uparrow$
 $0 \geq z$

Oss. Molte delle usuali proprietà non sono scritte negli assiomi, ma si deducono (utili esercizi)

(i) $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $(-1) \cdot (-1) = 1$

$\uparrow$
l'inverso additivo di 1

$\uparrow$
andrebbe dimostrato che è unico ...

(iii) $1 > 0 \leftarrow$ (SEMI HARD)

(iv) Se $a > 0$, allora $-a < 0$

Oss. importante

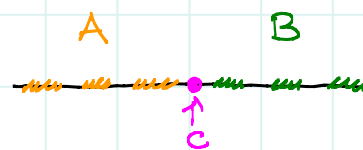
Fino a nulla distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

ASSIOMA DI CONTINUITÀ

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi non vuoti.

Diciamo che A sta a sinistra di B se

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$



Assioma di continuità Se A e B sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ con A a sinistra di B , allora (esiste un tizio in mezzo)

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \leq c \quad \forall a \in A \quad \text{AND} \quad c \leq b \quad \forall b \in B$$

Oss. A e B possono anche avere un elemento in comune (ma solo uno!). In questo caso lui è l'unico c possibile

Se $A \cap B = \emptyset$, c può comunque essere unico

$$(A = (-\infty, 12), \quad B = (12, +\infty))$$

Ci sono vari casi in cui c non è unico.

Fatto L'assioma di continuità non vale in $\mathbb{Q}$.

La dim. NON è ovvia. L'esempio classico è

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2, q > 0\}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2, q > 0\}$$

Si verifica facilmente che A è a sinistra di B .

Con più difficoltà, si verifica che

- un eventuale c in mezzo verificherebbe $c^2 = 2$
- non esiste $c \in \mathbb{Q}$ t.c. $c^2 = 2$.

TEOREMA (Misterioso) $\mathbb{R}$ esiste ed è "unico".

L'unicità va intesa nel senso che due strutture

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$ e $(\boxed{\mathbb{R}}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \boxed{\geq})$ che verificano gli assiomi sono "isomorfe", cioè esiste una funzione bigettiva

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$

che commuta con le operazioni e con l'ordinamento, cioè

$$f(x+y) = f(x) \boxed{+} f(y)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \boxed{\cdot} f(y)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \boxed{\leq} f(y)$$

Esercizio (Hard) Provare a dimostrare la parte unicità.

Oss. Quando risolviamo equazioni o disequazioni, siamo autorizzati ad usare solo gli assiomi

$$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Quali sono i veri passaggi?

$$3x - 2 = 0 \quad \text{aggiungo 2 a dx e sx}$$

$$(3x - 2) + 2 = 0 + 2$$

$$3x + (-2 + 2) = 0 + 2$$

$$3x + 0 = 2$$

$$3x = 2 \quad \text{Moltiplico per l'inverso unet. di 3}$$

e dopo un po' si finisce.

— 0 — 0 —