

FUNZIONI TRA INSIEMI

Definizione operativa Una funzione $f: A \rightarrow B$ sono 3 cose

- un insieme di partenza A ,
- un insieme di arrivo B ,
- una legge (procedura) che ad ogni elemento $a \in A$ associa un unico elemento $b \in B$, che indichiamo con $f(a)$.

Grafico di una funzione È il sottoinsieme del prod. cart. $A \times B$ def. da

$$\text{Grafico}(f) = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

Def. rigorosa di funzione Dati due insiemi A e B , una funzione è un qualunque sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ tale che

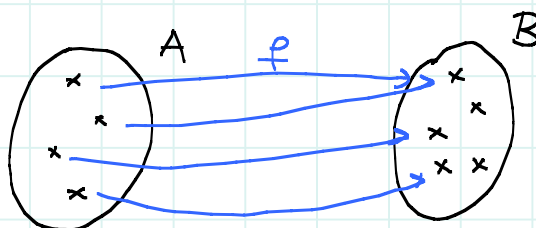
$$\forall a \in A \exists ! b \in B \text{ tale che } (a, b) \in G$$

Moralmente: $b = f(a)$ e "una funzione è il suo grafico"

Conseguenza Due funzioni $f_1: A \rightarrow B$ e $f_2: A \rightarrow B$ sono uguali se e solo se $f_1(a) = f_2(a) \quad \forall a \in A$.

Ad esempio: $f_1(x) = 2x$ e $f_2(x) = 4(x+1) - 2x - 4$ sono la stessa funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

Visualizzazione grafica



Composizione di funzioni Data $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$
si definisce $g \circ f: A \rightarrow C$ la funzione ottenuta facendo
prima f e poi g , quindi

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A$$

Importante: l'insieme di arrivo della f deve essere l'insieme di
partenza della g .

Più rigorosamente: dati $G_f \subseteq A \times B$ e $G_g \subseteq B \times C$
 $\uparrow$ $\uparrow$
grafico di f grafico di g

si definisce

$$G_{g \circ f} = \{ (a, c) \in A \times C : \exists b \in B \text{ t.c. } (a, b) \in G_f \wedge (b, c) \in G_g \}$$

FUNZIONI INIETTIVE, SURGETTIVE, BIGETTIVE

Def. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice

- **INIETTIVA** se manda elementi diversi di A in elem. diversi di B
cioè

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

$$P \rightarrow Q$$

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\text{NOT } Q \Rightarrow \text{NOT } P$$

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad (f(a_1) \neq f(a_2)) \vee (a_1 = a_2)$$

$$Q \vee (\text{NOT } P)$$

- **SURGETTIVA** se ogni $b \in B$ è f di qualcosa cioè

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{tale che } b = f(a)$$

- **BIGETTIVA** se è iniettiva e surgettiva

Iniettività, surgettività ed equazioni Sia $f: A \rightarrow B$

- f è iniettiva se, $\forall b \in B$, l'equazione $f(a) = b$ ha **al massimo** una soluzione
- f è surg. se ... $f(a) = b$ ha **almeno** una soluzione
- f è bigettiva ... **esattamente** una soluzione

FUNZIONE INVERSA Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.

Si dice che f è **INVERTIBILE** se esiste $g: B \rightarrow A$ (l'inversa di f) tale che

$$\begin{array}{ll} g(f(a)) = a & \forall a \in A \quad \leftarrow \text{inversa sinistra} \\ f(g(b)) = b & \forall b \in B \quad \leftarrow \text{inversa destra} \end{array}$$

Teorema Una funzione $f: A \rightarrow B$ è invertibile se e solo se è bigettiva. L'inversa in tal caso è unica.

Più precisamente

→ esiste almeno una inversa sinistra se e solo se f INIETTIVA

→ " " " destra " f SURGETTIVA

IMMAGINE E CONTROIMMAGINE Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.

- Per ogni sottoinsieme $D \subseteq A$ si definisce

$$f(D) = \{ f(a) : a \in D \} \subseteq B$$

↑
senza ipotesi di
iniettività e/o
surgettività

(tutte le punte di frecce
che partono da D)

- Per ogni sottoinsieme $E \subseteq B$ si definisce

$$f^{-1}(E) = \{ a \in A : f(a) \in E \} \subseteq A$$

(tutti gli inizi di
freccia che arrivano
in E)

Oss. La def. di $f(D)$ è per elenco. Per proprietà sarebbe

$$f(D) = \{b \in B : \exists a \in D \text{ t.c. } f(a) = b\}$$

Achtung! Occhio al simbolo f^{-1} che, a seconda del contesto, ha almeno 3 significati diversi:

- la controimmagine
- la funzione inversa
- la funzione reciproca $\frac{1}{f(x)}$

Iniettività e surg. nelle composizioni Solito setting...

- (1) Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva
- (2) " " surgettive " " surgettiva
- (3) Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f (la più interna) è iniettiva
- (4) Se $g \circ f$ è surgettiva, allora g (la più esterna) è surgettiva

Oss. f è surgettiva se e solo se $\underline{f(A)} = B$
immagine di f

— o — o — o —