

A.A. 2025/2026
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 3)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 091. Liminf e limsup di successioni: definizione come limite di inf/sup, primi esempi, caratterizzazione, definizione come inf dei maggioranti definitivi (o sup dei minoranti definitivi), rapporto con l'eventuale limite.	4
Lezione 092. Teorema del confronto e teorema dei carabinieri in versione liminf/limsup. Teorema delle sottosuccessioni in versione liminf/limsup. Caratterizzazione di liminf/limsup come minlim/maxlim.	9
Lezione 093. Criterio della radice, del rapporto e del rapporto-radice in versione liminf/limsup. Liminf/limsup della somma. Caso in cui uno dei due è un limite. Accenno al caso del prodotto.	13
Lezione 094. Liminf/limsup di funzioni: definizione, caratterizzazione come minlim/maxlim di successioni. Esempi: utilizzo di stime e sottosuccessioni per determinare liminf/limsup.	18
Lezione 095. Linguaggio topologico nella retta reale: parte interna, chiusura, frontiera, punti isolati, punti di accumulazione. Insiemi aperti e chiusi. Famiglie infinite di sottoinsiemi aperti/chiusi, e loro unione/intersezione.	23
Lezione 096. Caratterizzazione della chiusura per successioni. Topologia relativa. Quattro facce della continuità: epsilon/delta, con le successioni, con i limiti, topologica. Equivalenza tra continuità epsilon/delta e continuità per successioni. Continuità della composizione di funzioni continue.	27
Lezione 097. Fil rouge del calcolo differenziale (concatenazione logica dagli assiomi dei numeri reali ai teoremi sulle funzioni derivabili). Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange. Controesempi ed interpretazioni geometriche.	31
Lezione 098. Enunciato e dimostrazione della formula di Taylor con resto di Peano e di Lagrange. Road map per una dimostrazione diretta della formula con resto di Lagrange usando solo il teorema di Rolle.	36
Lezione 099. Dimostrazione dei teoremi di De L'Hôpital.	41
Lezione 100. Teoremi di Stolz–Cesàro: enunciato, dimostrazione, esempi. Teorema delle medie di Cesàro. Criterio rapporto- $\sqrt[n]{}$ radice come applicazione di Stolz–Cesàro. Limsup/liminf di una funzione applicata ad una funzione.	45

Lezione 101. Tre facce della compattezza: limitato e chiuso, compattezza per successioni, compattezza per ricoprimenti. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Dimostrazione dell'equivalenza tra le prime due definizioni. Dimostrazione che in ogni sottoinsieme non vuoto dei reali esistono successioni che tendono a $\inf/\sup$	50
Lezione 102. Ogni sottoinsieme non vuoto dei reali ammette $\max/\min$. Dimostrazione del teorema di Weierstrass per funzioni continue su un compatto. Le funzioni continue mandano compatti in compatti (ma non mandano chiusi in chiusi e limitati in limitati). Funzioni semicontinue inferiormente e superiormente: definizione ed esempi. Teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue.	54
Lezione 103. Compatto per ricoprimenti implica chiuso e limitato. Lemma del raggio magico (numero di Lebesgue). Lemma dei distributori (esistenza della epsilon rete). Compatto per successioni implica compatto per ricoprimenti. Le funzioni continue mandano compatti per ricoprimenti in compatti per ricoprimenti.	59
Lezione 104. Definizione di successione di Cauchy e prime proprietà. Completezza dei numeri reali: dimostrazione via $\liminf/\limsup$ e via Bolzano-Weierstrass. Accenno all'equivalenza tra assioma di continuità e completezza + proprietà archimedeo. . .	63
Lezione 105. Funzioni uniformemente continue: definizione, commenti, primi esempi. Lipschitzianità implica uniforme continuità. Comportamento delle funzioni uniformemente continue rispetto a somma, prodotto, restrizione, ricolloamento. . .	67
Lezione 106. Le funzioni uniformemente continue mandano successioni di Cauchy in successioni di Cauchy. Teorema di estensione: enunciato e dimostrazione. Teorema di Heine-Cantor: enunciato e due dimostrazioni (per assurdo via compattezza per successioni, diretta via compattezza per ricoprimenti e raggio magico).	71
Lezione 107. Continua in una semiretta più limite reale all'infinito implica uniformemente continua. Uniformemente continua in una semiretta implica sublineare. Funzioni Holderiane: definizione, primi esempi, commento geometrico.	76
Lezione 108. Proprietà delle funzioni Holderiane (somma, prodotto, composizione). Rapporti tra Lipschitzianità e Holderianità, sia su insiemi generali, sia su insiemi limitati. Holderianità vs Lipschitzianità di opportune potenze.	81
Lezione 109. Esercizi misti su funzioni uniformemente continue, Holderiane, Lipschitziane. Esempi borderline: funzioni uniformemente continue ma non Holderiane di ogni ordine, funzioni Holderiane di ogni ordine ma non Lipschitziane.	85
Lezione 110. Integrabilità delle funzioni continue in un intervallo. Legami tra la convergenza di un integrale improprio su una semiretta e il $\liminf/\limsup$ all'infinito. Ulteriori esempi su funzioni Holderiane.	89
Lezione 111. Combinazioni convesse e sottoinsiemi convessi della retta. Funzioni convesse e strettamente convesse: definizione algebrica e significato geometrico. Caratterizzazioni delle funzioni convesse: lemma dei due e dei tre rapporti incrementali. . .	94

- Lezione 112.** Legami tra convessità e crescita della derivata prima (posto che questa esista), legami tra convessità e segno della derivata seconda (posto che questa esista). Continuità e locale lipschitzianità nella parte interna dell'insieme di definizione. Derivata destra/sinistra per funzioni convesse: esistenza in ogni punto interno e proprietà di monotonia. 99
- Lezione 113.** Funzioni convesse: continuità a destra della derivata destra. Caratterizzazione dei punti di derivabilità in termini di derivata destra/sinistra. Punti di minimo di funzioni convesse. Disuguaglianze di convessità: le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti (sia nel caso regolare, sia nel caso generale) e disuguaglianza di Jensen (dimostrazione induttiva e dimostrazione via retta tangente). 104
- Lezione 114.** Disuguaglianza di Bernoulli come disuguaglianza di convessità. Disuguaglianza di Young. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: dimostrazione classica e per omogeneità. Disuguaglianza di Holder con due o più specie. Medie p-esime e disuguaglianza tra le medie. 109
- Lezione 115.** Funzioni convesse: semicontinuità superiore fino al bordo, i punti di massimo sono sempre al bordo. Lemma della sotto-sotto-successione. Relazioni tra monotonia, iniettività, continuità. Continuità della funzione inversa (insieme di partenza compatto). 114
- Lezione 116.** Continuità della funzione inversa (insieme di partenza convesso). Derivata della funzione inversa. Ulteriore regolarità della funzione inversa. Derivata della funzione composta via lemma della sotto-sotto-successione. 118
- Lezione 117.** Formula di Stirling per l'approssimazione del fattoriale (equivalenza asintotica e stima dal basso): enunciato e dimostrazione a partire dal prodotto di Wallis. Interpretazione del logaritmo del rapporto in termini di confronto tra un integrale e l'area di un trapezio. Formula iterativa per l'integrale della potenza n-esima del seno. 123
- Lezione 118.** Dimostrazione del calcolo del prodotto di Wallis. Stima asintotica per l'integrale della potenza n-esima del seno. Calcolo dell'integrale gaussiano a partire dalla stima asintotica precedente. 128
- Lezione 119.** Proprietà di riordinamento e di raggruppamento per serie numeriche assolutamente convergenti. Teorema di riordinamento di Riemann (riordinamento di serie convergenti, ma non assolutamente convergenti). 133
- Lezione 120.** Prodotto di Cauchy di serie numeriche: euristica, controesempio alla convergenza, dimostrazione del teorema di convergenza quando almeno una converge assolutamente. Esempio con la serie di Taylor dell'esponenziale. 137
- Lezione 121.** Ricapitolazione sui simboli di Landau: o piccolo, O grande, equivalenza asintotica. Rapporti tra le definizioni ed esempi. 142

Lezione 122. Come dimostrare che una funzione è derivabile o non derivabile in un punto. Proprietà di Darboux delle derivate. Esempi patologici: funzioni derivabili ovunque con derivata discontinua, funzioni con derivata positiva in un punto e non monotone in nessun intorno del punto.	147
Lezione 123. Tre diverse definizioni di integrale: secondo Darboux inclusiva, secondo Darboux ortodossa, secondo Riemann. Dimostrazione dell'equivalenza tra le tre definizioni di integrale, ed in particolare del fatto che una funzione integrabile secondo Darboux è integrabile secondo Riemann.	150
Lezione 124. Esempio in cui non è possibile passare al limite sotto il segno di integrale. Dimostrazione che l'integrale della potenza n -esima del seno tende a 0. Dimostrazione dell'integrabilità di funzioni continue tranne un numero finito di punti.	155
Lezione 125. Esempi di funzioni di classe C -infinito con tutte le derivate nulle in un punto. Raccordo C -infinito tra due costanti. Approssimazione di funzioni integrabili mediante funzioni di classe C -infinito.	158
Lezione 126. Esercizi misti, anche presi da test d'esame.	161
Lezione 127. Definizioni formali degli insiemi numerici: numeri naturali via assiomi di Peano, interi via quoziente su coppie di naturali, razionali via quoziente su coppie di interi, reali via sezioni di Dedekind (o semirette sinistre) di razionali.	165
Lezione 128. Road map della dimostrazione dell'unicità dei reali. Funzioni razionali come campo ordinato in cui non valgono proprietà archimedea e assioma di continuità. Tre esempi di bravate: calcolo degli integrali di Fresnel a partire dall'integrale Gaussiano, approccio di Eulero al Basel problem (somma dei reciproci dei quadrati), analogia tra una successione per ricorrenza e un'equazione differenziale.	169
Lezione 129. Serie armonica generalizzata ristretta agli interi che si scrivono in base 10 senza usare una data cifra. Divergenza della serie dei reciproci dei primi (dimostrazione via prodotto di Eulero e alla Erdos). Non esistenza del limite della successione $\sin(n)$. Accenno alla densità degli interi sulla circonferenza trigonometrica.	173
Lezione 130. Dimostrazione dell'irrazionalità del numero e . Limite strano collegato alla convergenza rapida della serie dell'esponenziale. Insiemi e funzioni strani: razionali ingrassati, funzioni periodiche con somma uguale all'identità, funzioni continue in un intervallo chiuso che assumono ogni valore nell'immagine infinite volte.	178

ANALISI 1 - LEZIONE 091

Note Title

25/03/2026

LIMINF E LIMSUP Tre possibili presentazioni equivalenti

- via liminf / limsup
- maggioranti / minoranti
- via maxlim / minlim

Prima presentazione Sia $\{a_n\}$ una successione.Se $\sup\{a_n\} = +\infty$, allora per def. si pone $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ Se $\sup\{a_n\} < +\infty$, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ definisco

$$S_m := \sup\{a_k : k \geq m\} \in \mathbb{R}$$

Osservo che $S_{m+1} \leq S_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ (sup di meno roba)Quindi per il teo. succ. monotone S_m ha limite in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Pongo

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

limite dei sup

Analogo per il liminf. Se $\inf\{a_n\} = -\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Altrimenti pongo $I_m := \inf\{a_k : k \geq m\} \in \mathbb{R}$

e infine

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} I_m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

↑
succ. debolm.
crescente

Soliti esempi

1

$$a_n = (-1)^n$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $S_n = 1$ e $I_n = -1$

Quindi $S_n \rightarrow 1 = \limsup$ e $I_n \rightarrow -1 = \liminf$

$$2 \quad a_n = \frac{1}{n}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che $S_n = \frac{1}{n}$ e $I_n = 0$

Quindi $S_n \rightarrow 0 = \limsup$ e $I_n \rightarrow 0 = \liminf$

$$3 \quad a_n = 3^{(-1)^n n}$$

$$1, \frac{1}{3}, 3^2, \frac{1}{3^3}, 3^4, \frac{1}{3^5}, \dots$$

Ora a_n NON è limitata superiormente, quindi $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

Dal basso è limitata e $I_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

Oss. fondamentale

$\liminf$ e $\limsup$ esistono per forza e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{con disug. in } \bar{\mathbb{R}})$$

Dim Tutti i casi banali in cui a_n non è limitata dall'alto o dal basso (in cui abbiamo $+\infty$ a dx o $-\infty$ a sx), si avrà sempre che

$$I_n \leq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{inf e sup della stessa roba})$$

Passando al limite (e posso farlo) ho la tesi.

— 0 — 0 —

CARATTERIZZAZIONE DI LIMSUP

$$\textcircled{1} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M \text{ frequentemente}$$

$$\textcircled{2} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ si ha che}$$

$$a_n \leq L + \varepsilon \text{ definitivamente}$$

$$a_n \geq L - \varepsilon \text{ frequentemente}$$

$$\textcircled{3} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M \text{ definitivamente}$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Dim. $\textcircled{1} \Rightarrow$ Per assurdo $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \geq M$ solo un numero finito di volte.

Ma allora definitivamente $a_n \leq M$, ma allora a_n è limitata dall'alto

$\Leftarrow$ Dall'ipotesi segue che $\sup a_n = +\infty$, quindi $\limsup = +\infty$ per def.

$$\textcircled{2} \quad \text{Per ipotesi sappiamo che } S_n \rightarrow L, \text{ cioè}$$

$$L - \varepsilon \leq S_n \leq L + \varepsilon \text{ definitivamente}$$

Diciamo che sia vera $\forall n \geq n_0$. Allora

$$S_n \leq L + \varepsilon \Rightarrow a_n \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

D'altra parte, se fosse che $a_n \geq L - \varepsilon$ solo un numero finito di volte, allora $S_n \leq L - \varepsilon$ da un certo p.to in poi, quindi $\lim S_n \leq L - \varepsilon$

$$\textcircled{3} \quad \text{Se } S_n \rightarrow -\infty, \text{ allora definitiv. } S_n \leq M \dots \text{ e quindi}$$

$$a_n \leq M \text{ da quel p.to in poi}$$

Versione Liminf

$$\textcircled{1} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M \text{ frequentemente}$$

$$\textcircled{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$$

$$a_n \geq l - \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

$$a_n \leq l + \varepsilon \text{ frequent.}$$

$$\textcircled{3} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M \text{ definitivamente.}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

SECONDA PRESENTAZIONE

→ Se a_n non ammette maggioranti, allora $\limsup a_n = +\infty$

→ Se a_n ammette maggioranti, allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{ M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \text{ definitivamente} \}$$

Analogo

→ Se a_n non ammette minoranti, allora $\liminf = -\infty$

→ Se li ammette, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{ M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \text{ definitivamente} \}$$

Idea della diu: nel caso $\limsup$

$a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente $(\leadsto L + \varepsilon$ è maggiorante definitivamente.)

$a_n \geq L - \varepsilon$ frequent. $(\leadsto L - \varepsilon$ non è maggiorante definitivamente.)

Teo 1 Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = m$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = m$$

Dim. Se $m = +\infty$ oppure $m = -\infty$, allora basta una delle due per concludere il limite

Se $m \in \mathbb{R}$, allora guardo la parte "giusta" nella caratterizzazione

$$a_n \leq l + \varepsilon \text{ defiu. (grazie al limsup)}$$

$$a_n \geq l - \varepsilon \text{ defiu. (grazie al liminf)}$$

Quindi basta prendere un defiu. comune.

Oss. Vale anche il viceversa, cioè se $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora per forza l è anche liminf e limsup.

Dim. Basta guardare la caratterizzazione nei vari casi.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 092

Note Title

25/03/2026

Teorema (Confronto a due) Siano a_n e b_n due succ.

Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitiv.}$$

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n$$

e

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n$$

Dim Tutti i casi banali con $-\infty$ a sx e $+\infty$ a dx

ci si riduce al caso in cui a_n e b_n sono limitate dall'alto e dal basso. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$\begin{array}{ccc} S_n^a & \leq & S_n^b \\ \uparrow & & \nwarrow \\ \sup\{a_k : k \geq n\} & & \sup\{b_k : k \geq n\} \end{array}$$

e analogamente $I_n^a \leq I_n^b$. Basta ora passare al limite e usare il confronto classico.

Alternativa : usare che $\limsup = \inf$ dei maggioranti definitivi, e osservare che tutti i magg. definit. della succ. b_n vanno bene anche per la succ. a_n .
Idem per il $\liminf$.

Teorema (Confronto a 3 aka Carabinieri) Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitiv.}$$

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq \limsup c_n$$

$\uparrow$ confronto $a_n \leq b_n$ $\uparrow$ ovvia $\uparrow$ confronto $b_n \leq c_n$

Corollario Se a_n e a_n hanno lo stesso limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora sono tutti $=$, ed in particolare $b_n \rightarrow l$.

[Andare a vedere a suo tempo quando si usava solo metà della def. di lim. per a_n e a_n]

Teorema (della sottosucc.) Sia a_n una succ. e a_{n_k} una sua sottosuccessione.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Se a_n ha limite, allora coincidono i laterali, e quindi...

Dim. La centrale è banale. Le due laterali sono simmetriche.

Facciamo quella a dx.

Se a_n NON è limitata sup, allora è gratis!

Altrimenti basta osservare che ogni maggiorante definitivo per a_n è anche un maggiorante definitivo per la sottosucc., quindi $\limsup a_{n_k} = \inf$ di più roba
— o — o —

In particolare, se una sottosucc. ha limite, questo è compreso tra $\liminf$ e $\limsup$ della successione

Terzo approccio: via MAXLIM e MINLIM

Si pone $\max_{n \rightarrow \infty} \lim a_n =$ massimo limite possibile per una s.succ. di a_n
 $\min_{n \rightarrow \infty} \lim a_n =$ minimo limite possibile per una s.succ. di a_n

(max e min nel senso di $\bar{\mathbb{R}}$ e siamo sicuri che esistono)

Teorema $\text{Maxlim } a_n = \text{limsup } a_n$
 $\text{Minlim } a_n = \text{liminf } a_n$

Dim È ovvio che $\text{Maxlim } a_n \leq \text{limsup } a_n$
 (se $a_{n_k} \rightarrow \ell$, allora $\ell \leq \text{limsup } a_n$ per il teo. delle sottosucc.)

e simmetrico per il liminf.

Quello che non è ovvio è che ogni successione ha una s.succ. che tende proprio al limsup.

Ci sono 3 casi.

① $\text{limsup } a_n = -\infty$. In questo caso già $a_n \rightarrow -\infty$:)

② $\text{limsup } a_n = +\infty$. Per caratterizzazione

$\forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \geq M$ frequentemente

La uso con $M=1$ trovo $a_{n_1} \geq 1$

La uso con $M=2$ trovo $a_{n_2} \geq 2$ con $n_2 > n_1$
 (ne ho infiniti che vanno bene)

La uso con $M=3$ trovo $a_{n_3} \geq 3$ con $n_3 > n_2$
 e così via.

Più formalmente ... definisco a_{n_1} come sopra.

Suppongo di aver definito $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$

e definisco $a_{n_{k+1}}$ tale che

$$a_{n_{k+1}} \geq \underbrace{k+1} \quad \text{e} \quad n_{k+1} > n_k$$

$\uparrow$ basta che vadano a $+\infty$ $\uparrow$ ne ho infiniti a disposizione

③ $\text{limsup } a_n = L \in \mathbb{R}$. Voglio trovare una s.succ. $a_{n_k} \rightarrow L$

Per caratterizzazione $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n \leq L + \varepsilon$ defn.
 $a_n \geq L - \varepsilon$ freq.



La uso con $\varepsilon = 1$ e trovo $L-1 \leq a_{m_1} \leq L+1$

" " $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e trovo $L - \frac{1}{2} \leq a_{m_2} \leq L + \frac{1}{2}$

con $m_2 > m_1$ (posso perché gli indici "bravi" sono infiniti)

Più in generale, dopo aver scelto $a_{m_1}, \dots, a_{m_k}$ scelgo m_{k+1} tale che

$$L - \frac{1}{k+1} \leq a_{m_{k+1}} \leq L + \frac{1}{k+1} \quad \text{e} \quad m_{k+1} > m_k$$

La s.succ. tende ad L per i Carabiniere.
— o — o —

Variaute Se $\limsup a_n = +\infty$, posso trovare s.succ. strett. crescente che tende a $+\infty$?

Sì! Costruzione evolutiva.

Prendo a_{m_0} a caso

Supposto di aver definito $a_{m_0}, \dots, a_{m_k}$ prendo m_{k+1} b.c.

$$m_{k+1} > m_k \quad \text{e} \quad a_{m_{k+1}} \geq \underbrace{a_{m_k} + 1}_M$$

Da qui per induzione $a_{m_k} \geq a_{m_0} + k$

Domanda Se $\limsup a_n = L \in \mathbb{R}$

→ esiste s.succ. debolm. cresc. $a_{m_k} \rightarrow L$

(forget it! $a_n = \frac{1}{n}$)

→ esiste s.succ. debolm. monotona $a_{m_k} \rightarrow L$?

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 093

Note Title

26/03/2026

Limsup ① $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{a_k : k \geq n\}$

② $\inf \{M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \text{ definitiv.}\}$

③ $\max \{ \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} : a_{n_k} \text{ ha limite in } \bar{\mathbb{R}} \}$

Radice Sia a_n una succ. con $a_n \geq 0$ definitiv.

(i) Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$

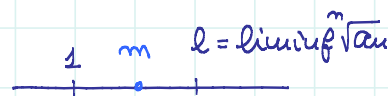
(ii) Se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

(iii) Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$, allora BOH.

Dim (caso i)

Scelgo m tale che $1 < m < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$

Per caratt. $\sqrt[n]{a_n} \geq m$ definitiv., ma allora $\underbrace{a_n}_{\rightarrow +\infty} \geq \underbrace{m^n}_{\rightarrow +\infty}$ definitiv.



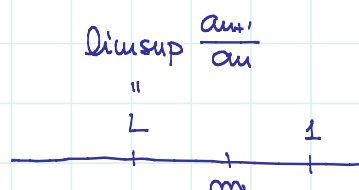
Rapporto Sia $a_n > 0$ definitiv. Allora

(i) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$

(ii) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

(iii) BOH come sopra

Dim caso (ii)



Per caratt. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq m$ defn., cioè

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq m$$

Da qui per induzione $a_n \leq a_{m_0} \cdot m^{n-m_0} \quad \forall n \geq m_0$
e quindi

$$0 \leq a_n \leq a_{m_0} \cdot m^{n-m_0} \quad \text{perché } m < 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Rapporto $\rightarrow$ Radice Sia $a_n > 0$ definitiv.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

In particolare, se il rapporto ha limite, allora sono tutti uguali, e quindi pure la radice ha lo stesso limite

Domanda : posso fare in modo che i 4 numeri siano $1 \leq 3 \leq 42 \leq 2026$?

Dim Il $\leq$ centrale è ovvio. Dimostriamo il $\leq$ di dx, e l'altro sarà simmetrico.

Se $\limsup = +\infty$, allora è ovvio

Se $\limsup = -\infty$, questo caso non si pone perché $a_n > 0$

Quindi $\limsup = L \in \mathbb{R}$

Allora per caratt.

$$\begin{array}{c} | \quad | \\ \hline L \quad L+\varepsilon \end{array}$$

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon \quad \text{da cui come prima}$$

$$a_n \leq a_{m_0} (L+\varepsilon)^{n-m_0} = \frac{a_{m_0}}{(L+\varepsilon)^{m_0}} (L+\varepsilon)^n$$

Facendo la radice n -esima:

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon) \cdot \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L+\varepsilon)^{n_0}}}$$

↓
1

Faccio $\limsup$ a dx e sx. A dx ho la realtà un limite e ottengo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$$

Essendo vero $\forall \varepsilon > 0$, questo completa la disug. di destra.

Esercizio Dimostrare la disug. di sx

Oss. Confrontare con la dim. "vecchia" per $\limsup$.

Il problema era nell'ultimo passo in cui non sapevamo ancora che $\sqrt[n]{a_n}$ aveva limite.

TEOREMI ALGEBRICI

Il $\limsup$ della somma NON è la somma dei $\limsup$.

Esempio classico: $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

$a_n + b_n = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$

$$\limsup a_n = \limsup b_n = \lim (a_n + b_n) = 1 \quad \text{☹}$$

Teo. somma In questo caso vale

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

TRANNE nei casi in cui c'è $+\infty - \infty$

Dim Centrale ovvio. Dim il dx (l'altro è simmetrico)

Se almeno uno tra $\limsup a_n$ e $\limsup b_n$ è $+\infty$, e l'altro non è $-\infty$, allora è ancora ovvio.

Nel caso rimanente poniamo

$$S_m^a := \sup \{a_k : k \geq m\}$$

$$S_m^b := \sup \{b_k : k \geq m\}$$

$$S_m^c := \sup \{a_k + b_k : k \geq m\}$$

Osserviamo che

$$S_m^c \leq S_m^a + S_m^b \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(perché $a_k \leq S_m^a$ e $b_k \leq S_m^b$ per ogni $k \geq m$, ma allora $a_k + b_k \leq S_m^a + S_m^b \quad \forall k \geq m$, quindi $S_m^a + S_m^b$ è un maggiorante, quindi $\geq S_m^c$)

Ora si passa al limite per $m \rightarrow +\infty$, sapendo già che esistono

$$S_m^a \rightarrow \limsup a_n$$

$$S_m^b \rightarrow \limsup b_n$$

$$S_m^c \rightarrow \limsup (a_n + b_n)$$

— o — o —

Caso importante Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste, allora per ogni succ. b_n :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

e idem per il $\liminf$.

Oss. Non è un $\Leftrightarrow$, ma una cond. suff.

Dim (con il $\limsup$) $\leq$ segue dal caso generale.

$\geq$ Posto $L_a := \lim a_n$ e $L_b := \limsup b_n$, devo dim. che

$$\limsup (a_n + b_n) \geq L_a + L_b$$

Per farlo, mi basta esibire n_k tale che

$$a_{n_k} + b_{n_k} \rightarrow L_a + L_b$$

Scelgo m_k in modo che $b_{m_k} \rightarrow L_b$ (posso perché
 $\limsup b_n = \max \lim b_n$)

Automaticamente $a_{m_k} \rightarrow L_a$ ☺.

Esercizio

$$\limsup (-a_n) = - \liminf a_n$$

$$\liminf (-a_n) = - \limsup a_n$$

Achtung!

Non provare nemmeno a scrivere un enunciato
 per $\liminf$ / $\limsup$ di $a_n b_n$.

(Fattibile quasi se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$)

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 094

Note Title

26/03/2026

Limsup / Liminf di funzioni

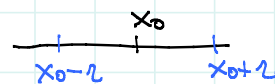
Facciamo un caso: $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ con $x_0 \in \mathbb{R}$
 (varianti con x_0^+ , x_0^- , $+\infty$, $-\infty$)

Prerequisito: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$ e

$$\forall r > 0 \quad \underbrace{(D \cap [x_0 - r, x_0 + r]) \setminus \{x_0\}}_{I_{x_0, r}} \neq \emptyset$$

Se $\forall r > 0$ si ha che $\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r}\} = +\infty$, allora per definizione

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$



Altrimenti $\exists r_0 > 0$ t.c. $\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r_0}\} < +\infty$
 e allora si pone

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r}\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

sono finiti appena $r \leq r_0$
 e "decregono" quando $r \rightarrow 0^+$
 (funzione deb. cresc. di r)

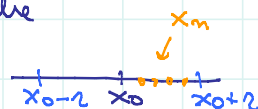
Lo stesso schema si applica al liminf.

Definizione via maxlim

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \exists x_m \rightarrow x_0 \text{ con } x_m \in D \text{ e } x_m \neq x_0$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_m) \rightarrow +\infty$

Dim $\Leftarrow$ è abbastanza chiaro che $\forall r > 0$ si ha che
 $\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r}\} = +\infty$



Quindi in ogni $I_{x_0, r}$ la $f(x)$ assume valori grandi a piacere visto che $x_n \in I_{x_0, r}$ definitivamente.

$\Rightarrow$ Ipotesi $\sup \{f(x) : x \in I_{x_0, r}\} = +\infty \quad \forall r > 0$

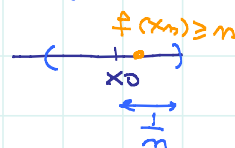
tesi $\exists x_n \rightarrow x_0 \text{ t.c. } f(x_n) \rightarrow +\infty$

Mi gioco l'ipotesi con $r = \frac{1}{n}$ (basta qualunque cosa $\rightarrow 0$)
e trovo $x_n \in I_{x_0, \frac{1}{n}}$ t.c. $f(x_n) \geq n$ (basta q.c. $\rightarrow +\infty$)

Da qui per confronto

$$x_n \rightarrow x_0$$

$$f(x_n) \rightarrow +\infty$$



$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

(Idea: prendo tutte le succ. $x_n \rightarrow x_0$ t.c. $f(x_n)$ ha limite
scrivo tutti i possibili limiti
di tutti questi limiti prendo il più grande
Quello è il Maxlim.)

Esempio $\sin(\frac{1}{x})$ per $x \rightarrow 0^+$. Scegliendo bene $x_n \rightarrow 0^+$
posso ottenere che $\sin(\frac{1}{x_n}) \rightarrow l$ con un
qualunque $l \in [-1, 1]$
 $\uparrow$ minlim. $\uparrow$ Maxlim

- Per ogni $x_n \rightarrow x_0$, se $f(x_n)$ ha limite, allora questo è $\leq L$
- Esiste $x_n \rightarrow x_0$ tale che $f(x_n) \rightarrow L$

Dim. il secondo pallino

Sappiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\exists r_0 > 0 \text{ t.c. } \forall r \in (0, r_0)$$

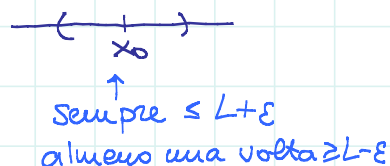
$$f(x) \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in I_{x_0, r}$$

$$f(x) \geq L - \varepsilon \quad \text{in almeno un pto di } I_{x_0, r}$$

Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $\delta = \frac{1}{n}$ e trovo x_n tale che

$$L - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq L + \frac{1}{n} \quad x_0 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_0 + \frac{1}{n}$$

Ora basta passare al limite.



Come si dimostra un limsup.

SLOGAN : $\rightarrow$ Disuguaglianza dall'alto
 $\rightarrow$ sottosucc. dal basso

Esempio 1 $a_n = \frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{8n + \sin n}$

CLAIM: $\limsup = \frac{1}{8}$

• Disug. dall'alto : $\frac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{8n + \sin n} \leq \frac{n + \sqrt{n}}{8n + \sin n}$

$\downarrow$
 $\frac{1}{8}$

Questo dice che $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{1}{8}$

• Sottosucc. dal basso : basta trovare $a_{n_k} \rightarrow \frac{1}{8}$ e a quel punto

$$\limsup a_n = \max \lim a_n \geq \frac{1}{8}$$

Qui basta a_{2n} .

Per il liminf: $\rightarrow$ disug. dal basso
 $\rightarrow$ s. succ. dall'alto.

Esempio 2 $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\sin x \cdot \cos \frac{1}{x}}_{f(x)}$

CLAIM: viene 1

• Disug. dall'alto: $\sin x \cdot \cos \frac{1}{x} \leq 1 \leadsto \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1$

• S. succ. dal basso: devo trovare $x_m \rightarrow +\infty$ t.c. $f(x_m) \rightarrow 1$
 il che direbbe che $\max \lim \geq 1$.

Basta prendere $x_m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$

Per il liminf $= -1$ userei $f(x) \geq -1$ e poi $x_m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$

Esempio 3 $f(x) = \cos x + \cos \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^+$

LIMSUP = 2

• Disug. dall'alto $f(x) \leq 2 \quad \therefore$

• Succ. dal basso: serve $x_m \rightarrow 0^+$ t.c. $f(x_m) \rightarrow 2$

$x_m = 2\pi m$ (non tende a 0^+ $\therefore$)

$x_m = \frac{1}{2\pi m}$

$$f(x_m) = \underbrace{\cos \frac{1}{2\pi m}}_{\substack{\downarrow \\ \cos(0)=1}} + \underbrace{\cos(2\pi m)}_{=1}$$

LIMINF = 0

• Disug. dal basso $f(x) \geq \underbrace{\cos x - 1}_{\downarrow 0}$

quindi $\liminf f(x) \geq 0$

• S. succ. dall'alto

$x_m = \frac{1}{\pi + 2m\pi} \rightarrow 0^+ \quad \text{e} \quad f(x_m) \rightarrow 0$

Esempio 4

$$f(x) = \cos x + \cos^2 \frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\boxed{\text{LIMSUP} = 2}$$

- $f(x) \leq 2$
- $x_m = 2\pi m$

$$\boxed{\text{LIMINF} = 0}$$

- $f(x) \geq -1 + \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \rightsquigarrow \text{Liminf} \geq 0$

- $x_m = 2\pi m + \pi$
 $\quad \quad \quad \text{--- } 0 \quad \quad \text{--- } 0 \quad \quad \text{---}$

ANALISI 1 - LEZIONE 095

Note Title

30/03/2026

Linguaggio topologico in $\mathbb{R}$ (ma buono fino a SPAZIO METRICO)

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme e sia $x_0 \in \mathbb{R}$

(1) Si dice che x_0 è **INTERNO** ad A se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$$

(tutto un intorno del p.to sta in A)

(2) Si dice che x_0 è **ADERENTE** ad A se

$$\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$$

(ogni intorno di x_0 tocca A)

(3) Si dice che x_0 è di **FRONTIERA** o sul **BORDO** di A

$$\begin{aligned} \forall r > 0 \quad & (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset \\ & (x_0 - r, x_0 + r) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \end{aligned}$$

(ogni intorno di x_0 tocca sia A sia il compl.)

(4) Si dice che x_0 è **ISOLATO** in A se

$$\exists r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A = \{x_0\}$$

(sta in A ma non ha vicini)

(5) Si dice che x_0 è di **ACCUMULAZIONE** per A se

$$\forall r > 0 \quad [(x_0 - r, x_0 + r) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

(in ogni intorno di x_0 esistono p.ti di A diversi da x_0)

Def. (terminologia) Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ possiamo

- $\text{Int}(A)$ oppure $\overset{\circ}{A}$ l'insieme dei pti interni ad A
- $\text{Clos}(A)$ oppure $\bar{A}$ " aderenti ad A
- ∂A ($\setminus \text{partial } A$) " di frontiera di A
- $\text{Isol}(A)$ " isolati di A
- $D(A)$ (derivato di A) " di accumulazione di A

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- **APERTO** se $A = \text{Int}(A)$
- **CHIUSO** se $A = \text{Clos}(A)$

Oss. banali Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$

$$(1) \text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \text{Clos}(A)$$

$$(2) \partial A \subseteq \text{Clos}(A)$$

$$(3) \text{Clos}(A) = \text{Int}(A) \cup \partial A \text{ con unione disgiunta}$$

$$(4) \text{Clos}(A) = \text{Isol}(A) \cup D(A) \text{ con unione disgiunta}$$

Dim (3) Sia $x_0 \in \text{Clos}(A)$. Questo vuol dire $\forall \varepsilon > 0 \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
Ci sono due casi

$$\rightarrow \text{se } \forall \varepsilon > 0 \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \rightsquigarrow x_0 \in \partial A$$

$$\rightarrow \text{se } \exists \varepsilon > 0 \ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \emptyset, \text{ allora}$$

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A \rightsquigarrow x_0 \in \text{Int}(A)$$

$$\text{Dim (4)} \rightarrow \text{se } \forall \varepsilon \ [(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \rightsquigarrow x_0 \in D(A)$$

$$\rightarrow \text{se } \exists \varepsilon \quad \quad \quad = \emptyset$$

$$\text{Ma allora } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \{x_0\} \rightsquigarrow x_0 \in \text{Isol}(A)$$

Esempi $A = [0, 1)$

$$\text{Int}(A) = (0, 1)$$

$$\text{Clos}(A) = [0, 1]$$

$$\partial A = \{0, 1\}$$

$$\text{Isol}(A) = \emptyset$$

$$D(A) = [0, 1]$$

$$B = (0, 1) \cup (1, 2) \cup \{3\}$$

$$\text{Int}(B) = (0, 1) \cup (1, 2) \quad \text{Clos}(B) = [0, 2] \cup \{3\} \quad \partial B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\text{Isol}(B) = \{3\} \quad D(B) = [0, 2]$$

$$\text{Int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$$

$$\text{Clos}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$\text{Isol}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$D(\mathbb{Z}) = \emptyset$$

$$\text{Int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$$

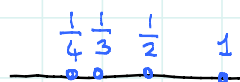
$$\text{Clos}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\text{Isol}(\mathbb{Q}) = \emptyset$$

$$D(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

$$A = \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \right\}$$



$$\text{Int}(A) = \emptyset$$

$$\text{Clos}(A) = A \cup \{0\}$$

$$\partial A = A \cup \{0\}$$

$$\text{Isol}(A) = A$$

$$D(A) = \{0\}$$

Esercizi (Harold) Costruzioni iterate.

Quanti insiemi diversi posso ottenere con queste costruzioni?

$$(1) A \rightarrow \text{Int}(A) \rightarrow \text{Clos}(\text{Int}(A)) \rightsquigarrow \text{Int}(\text{Clos}(\text{Int}(A))) \rightarrow \dots$$

$$(2) A \rightarrow \text{Clos}(A) \rightarrow \text{Int}(\text{Clos}(A)) \rightarrow \text{Clos}(\text{Int}(\text{Clos}(A))) \rightarrow \dots$$

$$(3) A \rightarrow \partial A \rightarrow \partial \partial A \rightarrow \dots$$

$$(4) A \rightarrow D(A) \rightarrow D(D(A)) \rightarrow D(D(D(A))) \rightarrow \dots$$

Unioni / intersezioni

- (1) Se A e B sono aperti, allora $A \cap B$ e $A \cup B$ sono aperti
 (2) Se A e B sono chiusi, allora $A \cap B$ e $A \cup B$ sono chiusi
 $\leadsto$ per inclusione vale per unioni / intersezioni **FINITE**

Dim $A \cap B$ aperto

A aperto $\forall x_0 \in A \exists r_A (x_0 - r_A, x_0 + r_A) \subseteq A$

B aperto $\forall x_0 \in B \exists r_B (x_0 - r_B, x_0 + r_B) \subseteq B$

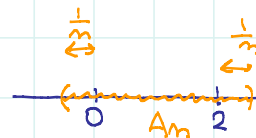
Ora se $x_0 \in A \cap B$ basta usare $r := \min \{r_A, r_B\}$ e di sicuro
 $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A \cap B$

(3) L'unione di ∞ aperti è un aperto

(4) L'intersezione di ∞ chiusi è chiusa

Achtung! L'intersezione di ∞ aperti può non essere un aperto

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right) \quad \bigcap_{n \geq 1} A_n = [0, 2]$$



L'unione di ∞ chiusi può non essere chiusa

$$C_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \quad \bigcup_{n \geq 2026} C_n = (0, 2)$$



Oss. $\text{Int}(A \cup B) = \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$?

$\supseteq$ è banale

$\subseteq$ puzza! $A = (0, 1)$ $B = [1, 2)$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 096

Note Title

30/03/2026

Caratterizzazioni con le successioni Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$(1) x_0 \in \text{Int}(A) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq \mathbb{R} \quad [x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n \in A \text{ definitivamente}]$$

$$(2) x_0 \in \text{Clos}(A) \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A \quad x_n \rightarrow x_0$$

$$(3) x_0 \in \partial A \Leftrightarrow \begin{aligned} &\exists \{x_n\} \subseteq A \quad x_n \rightarrow x_0 \\ &\exists \{\hat{x}_n\} \subseteq \mathbb{R} \setminus A \quad \hat{x}_n \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

$$(4) x_0 \in \text{Isol} A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq A \quad [x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n = x_0 \text{ definitivamente}]$$

$$(5) x_0 \in D(A) \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\} \quad x_n \rightarrow x_0$$

Dim (2) $\Leftarrow$ Ipotesi: $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \rightarrow x_0$

Tesi: $\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$

Mi viene dato $r > 0$. Per def. di limite $x_n \in (x_0 - r, x_0 + r)$ definitivamente.
Visto che $x_n \in A$ l'intersezione contiene addirittura ∞ elementi!

$\Rightarrow$ Ipotesi: $\forall r > 0 \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap A \neq \emptyset$

Tesi: $\exists \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \rightarrow x_0$

Mi gioco l'ipotesi con $r = \frac{1}{n}$. Trovo $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap A$
Questo ci dice che $x_n \in A$ e $x_n \rightarrow x_0$ (per i Carabinieri)

Oss. Al posto di $\frac{1}{n}$ bastava qualunque cosa che tendeva a 0.

Esercizio Dim. le altre equivalenze.

Linguaggio topologico relativo

Setting $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$

Def. Si dice che x_0 è interno ad A , relativamente a B , e si scrive $x_0 \in \text{Int}_B(A)$ se

$$\exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap B \subseteq A$$

Si dice che A è aperto relativamente a B se $A = \text{Int}_B(A)$

Oss. Volendo si può definire tutto il resto: $\text{Clos}_B(A)$, $\partial_B A$, ...

L'ESEMPIO $B = [0, 2]$ $A = (1, 2]$

Ora A è aperto relativamente a B $\ddot{\smile}$

Basta usare un qualunque raggio $r \in (0, 1)$ e la pallina con centro in 2 è contenuta in A .



Quello che è fuori da B NON ESISTE.

Prop. Gli aperti in A relativamente a B sono le intersezioni di B con i "veri aperti" di $\mathbb{R}$

$$\text{Nell'esempio: } (1, 2] = \underbrace{[0, 2]}_B \cap \underbrace{(1, 2]}_{\text{Vero aperto di } \mathbb{R}}$$

Un giorno ... B è NON connesso se e solo se è unione disgiunta di due aperti $\neq \emptyset$ relativamente a B stesso

QUATTRO FACCE DELLA CONTINUITÀ

Setting : $A \subseteq \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$

Cosa vuol dire che f è continua in x_0

(1) (Def. ε/δ)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

(2) (Con le successioni)

$$\forall \{x_n\} \subseteq A \quad [x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)]$$

(3) (Con i limiti) gratis se $x_0 \in \text{Isd}(A)$

$$\text{altrimenti } x_0 \in D(A) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(4) (Con gli aperti)

$$\forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto con } f(x_0) \in U \text{ si ha che } x_0 \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{A}}}{\text{Int}}(f^{-1}(U))$$

(la controimmagine di un aperto che contiene $f(x_0)$ ha x_0 come p.to interno relativamente ad A)

Def. La funzione f è continua in A se

$$(1) (\varepsilon/\delta) \quad \forall x_0 \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

$$f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

$$(2) (\text{succ.}) \quad \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } x_n \rightarrow x_0 \text{ si ha } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

$$(3) (\text{limiti}) \quad \text{per ogni } x_0 \in D(A) \text{ vale che } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$(4) (\text{Aperti}) \quad \forall U \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto} \quad f^{-1}(U) \text{ è aperto relativ. ad } A$$

Dim equiv. ε/δ e succ.

$\Rightarrow$ Ipotesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Tesi: se $x_n \rightarrow x_0$, allora $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Dim. devo dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, vale $f(x_n) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ definitivamente.

Mi viene dato ε , prendo il δ corr. dell'ipotesi, osservo che

$x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ definitivamente. (perché $x_n \rightarrow x_0$)

e quindi per questi n vale che

$f(x_n) \in$ intervallo in cui deve stare

$\Leftarrow$ Ipotesi: se $x_n \rightarrow x_0$, allora $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Dim Per assurdo supp. non sia vero. Allora

$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

Me la gioco con $\delta := \frac{1}{n}$. Mi ritrovo un p.to $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap A$ tale che

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Ma allora $x_n \rightarrow x_0$ per i Carabiniere, ma $f(x_n)$ non può tendere a $f(x_0)$.

— o — o —

Utilità Se f e g sono continue, allora $x \rightarrow g(f(x))$ è continua

Dim Sia $x_n \rightarrow x_0$. Per continuità di f avremo che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Per continuità di g avremo che $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 097

Note Title

01/04/2026

FIL ROUGE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Assiomi di $\mathbb{R} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \mathbb{H} \\ \downarrow \\ \mathbb{T} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \mathbb{M} \end{array}$$

WEIERSTRASS

ROLLE

CAUCHY

LAGRANGE

HOPITAL

TAYLOR

MONOTONIA

estremi compresi

Teorema di W (Versione light) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

ROAD MAP VIA ORDINAMENTO (per il max)

Di sicuro esiste

$$S := \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Poi

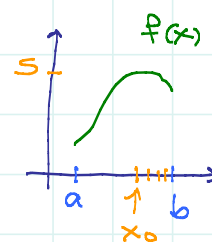
↑ qui serve l'assioma di continuità

$$x_0 := \inf \{ c \in [a, b] : S = \sup \{ f(x) : x \in [a, c] \} \}$$

↑ non vuoto perché b ci sta

Claim: $f(x_0) = S$ → chiaramente $f(x_0) \leq S$ → se fosse $f(x_0) < S$, trovo un assurdo perché il sup sarebbe $< S$ anche un po' a dx di x_0 .

— o — o —



Dove possono i p.ti di max/min

- ① staz. interni: $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0) = 0$
- ② sing. interni: $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)$ non esiste
- ③ bordo: $x_0 \in \{a,b\}$

— o — o —

Teorema di ROLLE Sia $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

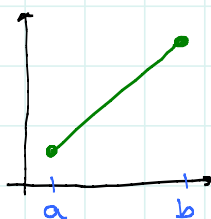
Supponiamo che

- (i) f continua su $[a,b]$ (estremi compresi)
- (ii) f derivabile in (a,b) (se è derivabile pure in $[a,b]$ meglio)
- (iii) $f(a) = f(b)$

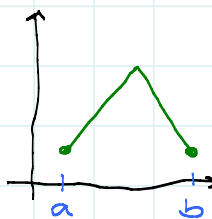
Allora

$$\exists c \in (a,b) \text{ t.c. } f'(c) = 0$$

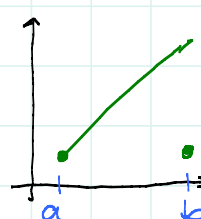
Oss. Servono davvero le ipotesi?



Mancava (iii)



Mancava (ii)
in un solo
p.to



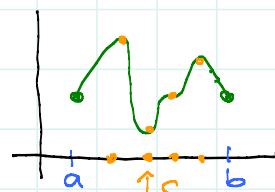
Mancava (i) solo in
un estremo

Dim Per W. max e min esistono

- Se un p.to di max o un p.to di min sta in (a,b) , allora ecco il c voluto (per forza è in categoria ①)
- Se max e min stanno al bordo, per l'ipotesi (iii) f è costante, ma allora vanno bene tutti i $c \in (a,b)$.

— o — o —

Oss. Il c di Rolle non è unico.
unico



Teorema di CAUCHY Siano $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) f e g continue in $[a,b]$,
- (ii) " derivabili in (a,b) .

Allora esiste almeno un $c \in (a,b)$ t.c.,

$$(f(b) - f(a)) g'(c) = (g(b) - g(a)) f'(c)$$

1^a tesi

Se inoltre $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ (terza ipotesi)
allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2^a tesi

L'ESEMPIO $[a,b] = [-1, 1]$ $f(x) = x^3$ $g(x) = x^2$

$$\underbrace{(f(b) - f(a))}_{\substack{= \\ 2}} g'(c) = \underbrace{(g(b) - g(a))}_{\substack{= \\ 0}} f'(c)$$

Per forza $g'(c) = 0$, quindi $c = 0$ che funziona in quanto anche $f'(0) = 0$.

Tuttavia la seconda tesi non funziona.

Dim Considero la funzione

$$\varphi(x) := (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x)$$

Osservo che $\varphi(a) = \varphi(b)$ (basta sostituire) e quindi
 $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ verifica le ipotesi di ROLLE. Ma allora
 $\exists c \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(c) = 0$ no 1^a tesi

Per la seconda tesi: se fosse $g(b) = g(a)$, allora g verificherebbe le hp di Rolle, quindi $\exists c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$
 $\leadsto g$ non verifica la 3^a ipotesi.
 — o — o —

Teorema di LAGRANGE Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$

(ii) f derivabile in (a,b)

Allora

$$\exists c \in (a,b) \text{ t.c. } f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

DIM 1 Riscrivo la tesi come

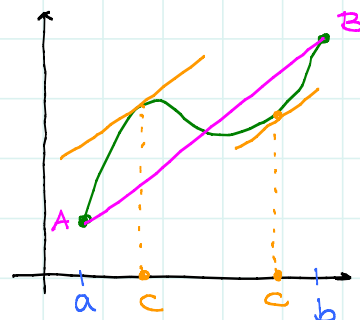
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$$

e questo è Cauchy con $g(x) = x$ (seconda tesi)

Oss. Interpretazione geometrica.

Nella tesi riscritta

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \text{coeff. ang. retta AB}$$



Lagrange: $\exists c \in (a,b)$ t.c. la
 retta tangente al grafico in c
 è parallela ad AB

DIM 2 Considero $\varphi(x) = f(x) - \text{retta}$. Allora $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Quindi posso applicare ROLLE a $\varphi(x)$ ottenendo $c \in (a,b)$ t.c.

$\varphi'(c) = 0$. Ma $\varphi'(c) = f'(c) - \text{coeff. ang. retta}$ $\leadsto$ tesi

Oss. Ho riciclato la dim. di Cauchy nel caso specifico.

Oss. Nuova d'm. di Cauchy

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

$$g(b) - g(a) = g'(c) \cdot (b-a)$$

Divido e ottengo Cauchy

FAKE !!! Il c sopra e sotto sono DIVERSI !!
— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 098

Note Title

01/04/2026

Da CAUCHY / HOPITAL a TAYLOR

Caso con centro in $x_0 = 0$ (quello generale si ottiene considerando la funzione $g(x) = f(x_0 + x)$)

↑ corretto dopo video

$$P_m(x) := \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

TAYLOR PEANO Sia $r > 0$ e $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $m \in \mathbb{N}$ (ordine dello sviluppo)

Supponiamo che

(i) f è derivabile $m-1$ volte in $(-r, r)$

(ii) f è derivabile m volte in $x=0$

Allora

$$f(x) = P_m(x) + o(x^m) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

TAYLOR LAGRANGE Stesso setting di sopra

Supponiamo che

(i) f è derivabile $m+1$ volte in $(-r, r)$.

Allora per ogni $x \in (-r, r)$ esiste c compreso tra 0 ed x

(x potrebbe essere anche negativo) tale che

$$f(x) = P_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} x^{m+1} \quad (c \text{ dipende da } x)$$

ROAD MAP → Caratterizzazione di $P_m(x)$

→ Finale diverso per le due dimostrazioni.

CARATTERIZZAZIONE

$P_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale che le sue derivate di ordine $k = 0, 1, \dots, n$ coincidono in $x=0$ con quelle di $f(x)$.

STEP 1 (Derivata di un monomio)

$$\frac{d^i}{dx}(x^k) = \frac{k!}{\underbrace{(k-i)!}_{k(k-1)\dots(k-i+1)}} x^{k-i}$$

Formalmente si dimostra per induzione su i .

In particolare, se calcolo per $x=0$, viene $\begin{matrix} \nearrow k! & \text{se } i=k \\ \searrow 0 & \text{altrimenti} \end{matrix}$

STEP 2 (Derivata di un polinomio)

Sia

$$Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

un polinomio.

Allora la sua derivata i -esima in $x=0$ è $a_i \cdot i!$

Dim: uso la derivata del monomio e somma.

CONCLUSIONE

La derivata i -esima del pol. di Taylor di f , calcolata in $x=0$, è

$$i! \cdot \boxed{\frac{f^{(i)}(0)}{i!}} = f^{(i)}(0)$$

$\uparrow$
coeff. di x^i nel
pol. di Taylor

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) := f(x) - P_m(x)$$

Questa soddisfa $\varphi^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k = 0, 1, \dots, m$ (*)

FINALE PEANO Sia $\varphi: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (i) φ è derivabile $(m-1)$ volte in $(-r, r)$
- (ii) " " m volte in $x=0$
- (iii) φ verifica (*).

Allora

$$\varphi(x) = o(x^m) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Dimo. Devo dim. che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^m} = 0$.

Uso Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^m} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{m x^{m-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi''(x)}{m(m-1) x^{m-2}} \\ &= \dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(m-1)}(x)}{m! x} \end{aligned}$$

Con un colpo di Hôp finirei, ma non posso perché sono stato tirato con le ipotesi (servirebbe $\varphi^{(m)}(x)$ in tutto l'intervallo)
Mi salvo usando la def. di derivata

$$\frac{1}{m!} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(m-1)}(x) - \varphi^{(m-1)}(0)}{x} = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) = 0$$

↑
def. di derivata

FINALE LAGRANGE Sia $\varphi: (-2,2) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) φ è derivabile $n+1$ volte in $(-2,2)$

(ii) φ verifica (*)

Allora per ogni $x \in (-2,2)$ esiste c , compreso tra 0 e x (sketch traue nel caso $x=0$) tale che

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Dim Uso Cauchy



$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} &= \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{\varphi'(c_1)}{(n+1)c_1^n} = \frac{\varphi'(c_1) - \varphi'(0)}{(n+1)c_1^n - (n+1)0^n} \\ &\quad \uparrow \text{Cauchy con } g(x) = x^{n+1} \\ &= \frac{\varphi''(c_2)}{(n+1)n c_2^{n-1}} \\ &\quad \uparrow \text{Cauchy in } [0, c_1] \text{ con } g(x) = x^n \end{aligned}$$

Proseguo allo stesso modo finché al denominatore la derivata viene "sesta c ". A quel punto al num. ho $\varphi^{(n+1)}(c_m)$ e al denom. ho $(n+1)!$

— o — o —

Oss Se voglio dire "meno con i puntini" devo fare invezione su n . In questo caso l'enunciato che si dimostra è " $\forall \varphi$ tale che ... vale la tesi "

Caso Base $n=1$ è la definizione di derivata

Supponiamo vero per n e dimostriamo per $n+1$. Prendiamo φ che ha n derivate in $(-2,2)$ e $n+1$ in $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} \stackrel{\text{H\^op}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x)}{(n+1)x^n} \quad \text{e ora applico l'ipotesi induttiva a } \varphi'$$

Curiosità Taylor-Lagrange si può dim. direttamente da Rolle.

Idea Scrivo

$$f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (a-x_0)^k = R_n (a-x_0)^{n+1}$$

e voglio trovare $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$

Introduco la funzione (metto x al posto di x_0)

$$\varphi(x) := f(a) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (a-x)^k - R_n (a-x)^{n+1}$$

Osservo che $\varphi(a) = 0$ (nella sommatoria resta solo $k=0$)

$\varphi(x_0) = 0$ (perché LHS-RHS di sopra)

Quindi per ROLLE esiste c t.c. $\varphi'(c) = 0$.

Facendo i conti si ha la tesi.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 099

Note Title

02/04/2026

De L'Hôpital (caso $\frac{0}{0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $f: (x_0, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (x_0, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f e g sono continue e derivabili in (x_0, x_0+r) (senza estremi)

(ii) si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0 \quad (\text{quindi è } \frac{0}{0})$$

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0+r)$.

Allora

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0+r)$$

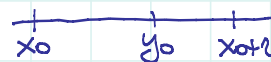
e vale la solita cosa a quattro

$$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In particolare se $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ha limite, allora anche $\frac{f(x)}{g(x)}$ ha lo stesso limite.

Dim che $g(x) \neq 0$ Estendo g a $[x_0, x_0+r)$ ponendo

$$\hat{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (x_0, x_0+r) \\ 0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$



Osservo che $\hat{g}: [x_0, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Supponiamo che esista $y_0 \in (x_0, x_0+r)$ t.c. $g(y_0) = 0$.

Allora $\hat{g}$ verifica le ipotesi di Rolle in $[x_0, y_0]$. [Verificare!]

Ma allora esiste $c \in (x_0, y_0)$ t.c. $\hat{g}'(c) = 0$. Ma $\hat{g}'(c) = g'(c)$ e questo è contro l'ipotesi.

Dimi cosa a 4] La $\leq$ centrale è banale.

Dimostriamo quella a dx (l'altra è simmetrica)

Se $\limsup a_{dx}$ è $+\infty$, allora è banale.

Facciamo il caso in cui è un certo $L \in \mathbb{R}$ (se $L = -\infty$ ne parliamo dopo).

Per caratterizzazione di $\limsup$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in (0, 2)$ tale che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$


Ora considero le estensioni $\hat{f}$ e $\hat{g}$ definite come sopra e ho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\hat{f}(x)}{\hat{g}(x)} = \frac{\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)}{\hat{g}(x) - \hat{g}(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

Cauchy
in $[x_0, x]$



per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Faccendo il $\limsup$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

Dal momento che è vero $\forall \varepsilon > 0$ ho concluso che $\limsup \frac{f(x)}{g(x)} \leq L$.

Oss. Se uno qui non vuole estendere, scrive

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$



per ogni $x_0 < y < x < x_0 + \delta$

Mandando $y \rightarrow x_0^+$ ottengo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Oss. Se il $\limsup$ a dx è $-\infty$, allora

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta \in (0, 1) \text{ t.c. } \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq M \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Da qui come prima si arriva a $\limsup \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$

ed essendo vero per ogni $M \dots$
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

De L'Hôpital (Caso $\frac{*}{\infty}$, con $x \rightarrow x_0^+$)

Setting come prima. Supponiamo che

(i) f e g continue e derivabili in $(x_0, x_0 + 2)$,

(ii) vale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty \quad (\text{basta ie deu.})$$

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + 2)$.

Allora (è gratis che $g(x) > 0$ almeno vicino a x_0 visto che tende a $+\infty$, quindi posso dividere e)

vale la solita cosa n. 4.

Dim Come prima supponiamo $\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e trovo $\delta \in (0, 2)$ t.c.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Allora [ricordarsi di aggiungere e togliere solo sopra]

per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ abbiamo che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0 + \delta) + f(x_0 + \delta)}{g(x)}$$



Ora
$$\frac{f(x) - f(x_0 + \delta)}{g(x) - g(x_0 + \delta)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \varepsilon$$

da cui $f(x) - f(x_0 + \delta) \leq (L + \varepsilon)(g(x) - g(x_0 + \delta))$

(posso moltiplicare perché denomin. > 0 almeno per x abbastanza vicini a x_0). Quindi per questi x vale che

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(x_0 + \delta) + f(x_0 + \delta)}{g(x)} \leq \frac{(L + \varepsilon)(g(x) - g(x_0 + \delta)) + f(x_0 + \delta)}{g(x)} \\ &= L + \varepsilon + \frac{-(L + \varepsilon)g(x_0 + \delta) + f(x_0 + \delta)}{g(x)} \end{aligned}$$

$\downarrow$
 0 quando $x \rightarrow x_0$

Facendo il limsup a dx e sx ottengo

$$\limsup_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \varepsilon$$

ed essendo ε arbitrario...

— o — o —

Oss. 1 Quando $x \rightarrow +\infty$ si pone $x = \frac{1}{t}$ e ci si riduce a $t \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

Oss 2 Se nel caso $\frac{0}{0}$ si assume che f e g siano definite e derivabili anche in x_0 , allora la dim. diventa banale

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}$$

$\downarrow$ $f'(x_0)$ $\downarrow$ $\frac{1}{g'(x_0)}$
 — o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 100

Note Title

02/04/2026

TEOREMA DI CESÀRO - STOLZ (aka Hopital per successioni)**Coro $\frac{0}{0}$** Siano a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

(i) $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$ (ii) b_n strett. decrescente (in particolare $b_n > 0$ sempre)

Allora

$$\liminf \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Dim Come prima facciamo disug. di dx assumendo

$$\limsup \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \in \mathbb{R}$$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Per caratt. trovo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_{m+1} - a_m}{b_{m+1} - b_m} \leq L + \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

Ne la aggiunto per avere denomi > 0 e ottengo

$$\frac{a_m - a_{m+1}}{b_m - b_{m+1}} \leq L + \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

cioè

$$a_m - a_{m+1} \leq (L + \varepsilon)(b_m - b_{m+1}) \quad \forall m \geq m_0$$

Osservo che per ogni $m > n \geq m_0$ vale

$$a_m - a_n = \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \leq (L + \varepsilon) \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) = (L + \varepsilon)(b_n - b_m)$$

↑
telescopica

e quindi

$$\frac{a_m - a_{m_0}}{b_m - b_{m_0}} \leq L + \varepsilon \quad \forall m > m \geq m_0$$

Se ora faccio tendere $m \rightarrow +\infty$ ottengo

$$\frac{a_m}{b_m} \leq L + \varepsilon \quad \forall m \geq m_0$$

e quindi

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_m}{b_m} \leq L + \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ arbitrario.}$$

— 0 — 0 —

Caso $\frac{*}{\infty}$ Sempre a_n e b_n due successioni.

Supponiamo che

(i) $b_n \rightarrow +\infty$ (basta denom.)

(ii) b_n strett. cresc. [non basta $b_{n+1} \neq b_n$ o b_n iniettiva]

Allora solita cosa a 4.

Dim Come al solito per ogni $\varepsilon > 0$ trovo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

cioè (ora posso moltiplicare)

$$a_{n+1} - a_n \leq (L + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

Adesso

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_{m_0} + a_{m_0}}{b_n}$$

e come prima

$$a_n - a_{m_0} = \sum_{k=m_0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \leq (L + \varepsilon) \sum_{k=m_0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = (L + \varepsilon)(b_n - b_{m_0})$$

↑
telescopico

per ogni $n > m_0$. Riprendendo il conto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a_n - a_{n_0} + a_{n_0}}{b_n} \leq \frac{(L+\varepsilon)(b_n - b_{n_0}) + a_{n_0}}{b_n} \\ &= L + \varepsilon + \frac{a_{n_0} - (L+\varepsilon)b_{n_0}}{b_n} \end{aligned}$$

$\downarrow$
 0

e quindi $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon$ con ε arbitrario $\hat{=}$

$\text{---} \quad 0 \quad \text{---} \quad 0 \quad \text{---}$

Applicazione 1: teorema delle medie di CESÀRO

Data una succ. a_n , poniamo $M_n := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$
 $\uparrow$
 media dei primi n termini

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf M_n \leq \limsup M_n \leq \limsup a_n$$

In particolare, se $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $M_n \rightarrow$ stesso l .

Oss. Può succedere che M_n abbia limite, ma a_n no.
 (esempio classico: $a_n = (-1)^n$ e si verifica che $M_n \rightarrow 0$)

Dim Pongo $A_n := a_1 + \dots + a_n$

$$\limsup M_n = \limsup \frac{A_n}{n} \leq \limsup \frac{A_{n+1} - A_n}{(n+1) - n} = \limsup a_{n+1}$$

$\uparrow$
 c.s.

$\downarrow$
 1

e idem per il $\liminf$.

Esercizi (Hard) $\rightarrow$ esiste a_n che resiste a 2026 step di cesàrizazione e poi cede?
 $\rightarrow$ esiste a_n che resiste a ∞ step?

Applicazione 2: rapporto $\rightarrow$ radice $\sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{1}{n} \log a_n}$

Pongo $A_n = \log a_n$ $B_n = n$. Allora

$$\limsup \frac{\log a_n}{n} = \limsup \frac{A_n}{B_n} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \limsup \frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n}$$

$$\limsup \log(\sqrt[n]{a_n}) = \limsup \log\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Fatto importante Se $\limsup a_n \leq L$, posso dedurre che
 $\limsup f(a_n) \leq f(L)$?

E analogo per il $\liminf$?

No in generale: $a_n = 0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \dots$ $\limsup a_n = \frac{\pi}{2}$

$$\cos a_n = 1, 0, 1, 0, \dots \quad \limsup \cos a_n = 1$$

Sì se f è CONTINUA e DEBOLMENTE CRESCENTE

$\forall \varepsilon > 0$ vale $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente.

Quindi $f(a_n) \leq f(L + \varepsilon)$ definitivamente.

da cui

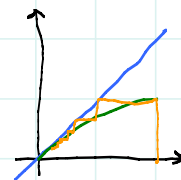
$$\limsup f(a_n) \leq f(L + \varepsilon)$$

ora passo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Applicazione 3 Sia $x_{n+1} = \sin(x_n)$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Si vede che $a_n \rightarrow 0^+$.

Domanda: parte principale?



Euristica: Supponiamo $x_n = \frac{c}{n^a}$ voglio trovare c ed a

Sostituisco

$$\frac{c}{(n+1)^a} = \sin\left(\frac{c}{n^a}\right) \sim \frac{c}{n^a} - \frac{1}{6} \frac{c^3}{n^{3a}}$$

Moltiplico per n^a e divido per c

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^a = 1 - \frac{1}{6} \frac{c^2}{n^{2a}}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} \sim 1 - \frac{a}{n}$$

Quindi $1 - \frac{a}{n} \sim 1 - \frac{1}{6} \frac{c^2}{n^{2a}} \Rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}} \quad c = \sqrt{3}$
 ↑ aggiusto gli esponenti

CLAIM: $x_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$, cioè $x_n^2 \sim \frac{3}{n}$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 \cdot n = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 \cdot n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} \stackrel{\text{C.S.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2(x_n)} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^2 - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} = 3 \quad \text{☺}$$

Analogo: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} \quad x_0 = 2026 \quad x_n \rightarrow +\infty \quad \text{Ma come?}$

ANALISI 1 - LEZIONE 101

Note Title

13/04/2026

TRE FACCE DELLA COMPATTEZZA Setting : $A \subseteq \mathbb{R}$

Def.1 (Compattezza ingannevole) Si dice che A è COMPATTO se è limitato + chiuso

Def.2 (Compattezza per successioni) Si dice che A è comp. per succ. se ogni successione $\{x_n\} \subseteq A$ ammette una s.succ. convergente, cioè esiste una succ. n_k crescente di interi pos, ed esiste $x_\infty \in A$ tale $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

Def.3 (Comp. per ricoprimenti) Si dice che A è comp. per ricopr. se ogni ricoprimento aperto di A ammette un sottoricoprimento finito.

- ricoprimento aperto : famiglia $\{U_i\}_{i \in I}$ di aperti di $\mathbb{R}$ tali che

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

- sottoricoprimento finito : esiste $J \subseteq I$, con J finito, tale che

$$A \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$$

Esempi di famiglie di aperti

- ① $U_i = (i, i+2)$ $i \in \mathbb{N}$ ricoprono la semiretta $[1, +\infty)$ e anche la semiretta $(0, +\infty)$

In questi casi non esiste un s.ricopr. finito.

② Gli stessi di prima ricoprono anche $[5, 2026]$ e in questo caso ne basta un numero finito

③ $U_i = (i, i+2)$ $i \in \mathbb{R}$ famiglia più che numerabile.

Oss. La def. 3 si può dare anche considerando U_i come aperti in A (e non in $\mathbb{R}$). Basta considerare le intersezioni con A .

TEOREMA Le 3 nozioni di compattezza sono equivalenti **in $\mathbb{R}$** .

Teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS

Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una succ. LIMITATA.

Allora x_n ammette una s.succ. convergente ad un numero reale.

L'ipotesi è $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M$

Dim 1 Sia $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Allora per forza $L \in [-M, M]$, quindi è reale.

Ma essendo $L = \max \lim x_n$, per forza esiste s.succ. $x_{n_k} \rightarrow L$.

Potrei farla uguale con il $\liminf$.

Dim 2 Considero questo insieme



$$A = \{a \in [-M, M] : a \leq x_n \text{ per infiniti indici } n\}$$

Chiaramente $A \neq \emptyset$ perché contiene almeno $-M$. Pongo

$$x_\infty := \sup A \quad (\text{è reale in } [-M, M])$$

Dico che esiste una s.succ. che converge a x_∞ .

Osservazione chiave: per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$x_\infty - \varepsilon \leq x_n \quad \text{per infiniti indici}$$

$$x_\infty + \varepsilon \geq x_n \quad \text{definitivamente (altrimenti avremmo che } x_\infty + \varepsilon \in A)$$

Ora scelgo x_{m_k} a caso e poi, supponendo di aver già scelto

$$x_{m_0}, x_{m_1}, \dots, x_{m_k}$$

mi gioco l'osservazione chiave con $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ e trovo di sicuro un indice $m_{k+1} > m_k$ tale che

$$x_\infty - \frac{1}{k+1} \leq x_{m_{k+1}} \leq x_\infty + \frac{1}{k+1}$$

Per i carabinieri $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$.

Oss. Nella dim 2 ho ridefinito il LIMSUP e ridimostrato che è pure maxDim.

Oss. Si poteva partire in tanti altri modi, ad esempio

$$A = \{a \in [-M, M] : x_n \leq a \text{ definitiv.}\}$$

$$x_\infty := \sup A$$

$$A = \{a \in [-M, M] : x_n \leq a \text{ per infiniti } n\}$$

$$x_\infty := \inf A$$

Corollario Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato e chiuso, allora è compatto per successioni [(1) $\Rightarrow$ (2) del teorema]

Dim Sia $\{x_n\} \subseteq A$ una succ.

Poiché A è limitato, $\{x_n\}$ è limitata, quindi per BW esiste

$$x_{m_k} \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$$

Ci serve che $x_\infty \in A$. Qui entra in gioco che A è chiuso.

Basta osservare che $x_\infty \in \text{Clos}(A) = A$ perché ogni intervallo $(x_\infty - 2, x_\infty + 2)$ interseca A (contiene x_{m_k} per k grande).

Dim (2) $\Rightarrow$ (1) nel teorema Devo dim. che A è limitato + chiuso.

Limitato Supponiamo che non lo sia (per esempio $\sup A = +\infty$, il caso $\inf A = -\infty$ è analogo).

$\sup A = +\infty$ vuol dire che

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \quad \text{t.c.} \quad a \geq M$$

Me la gioco con $M = n$ e trovo $x_n \in A$ t.c. $x_n \geq n$

Questa succ. tende a $+\infty$ e quindi non può avere s.succ. conv.

Chiuso Supponiamo che non lo sia. Vuol dire che esiste

$$x_\infty \in \text{Clos}(A) \quad \text{t.c.} \quad x_\infty \notin A$$

$$\uparrow \quad \forall r > 0 \quad (x_\infty - r, x_\infty + r) \cap A \neq \emptyset$$

Me la gioco con $r = \frac{1}{n}$ e trovo $x_n \in A$ t.c.

$$x_\infty - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x_\infty + \frac{1}{n}$$

Questa succ. $\{x_n\}$ converge a x_∞ , quindi tutte le sue s.succ. continuano a convergere a x_∞ , che però non sta in A .

— o — o —

LEMMA Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, e sia $L := \sup A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Allora esiste una successione $\{a_n\} \subseteq A$ t.c. $a_n \rightarrow L$.

Dim (Solita roba)

Se $L = +\infty$, ragiono come sopra

... per ogni n trovo $a_n \in A$ t.c. $a_n \geq n$... $a_n \rightarrow +\infty$

Se $L \in \mathbb{R}$, allora

$$a \leq L \quad \forall a \in A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a \geq L - \varepsilon$$

Me la gioco con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e trovo $a_n \in A$ t.c. $L - \frac{1}{n} \leq a_n \leq L$.

Per i Carabiniere $a_n \rightarrow L$.

Oss. Discorso analogo vale per l'inf.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 102

Note Title

13/04/2026

LEMMA / ESERCIZIO Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ compatto e $\neq \emptyset$.Allora A ammette max e min.**Dim** Sia $L := \sup A$. Osservo che $L \in \mathbb{R}$ perché A è limitato.Osservo che $L \in \text{Clos}(A)$ perché

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists a \in A \text{ t.c. } L - \epsilon \leq a \leq L \leq L + \epsilon$$

Quindi $L \in A$.

Idem per il minimo.

Esercizio $A = (0, 1]$ è compatto? NO**Con def 1** Non è chiuso perché $0 \in \text{Clos}(A)$ ma $0 \notin A$ **Con def 2** Prendo $a_n = \frac{1}{n}$. Ovviamente $a_n \in A$ per ogni $n \geq 1$,
ma non ha s.succ. che convergono ad elementi di A **Con def 3** Devo trovare un ricoprimento aperto che non ha
sottoricoprimenti finitiPrendo $U_i := (\frac{1}{i}, 2026)$ con $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ È chiaro che $A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} U_i = (0, 2026)$ ma se uso solo un numero finito non riesco a ricoprire
tutti i numeri abbastanza piccoli.Avrei potuto prendere $U_i = (i, 2026)$ con $i \in (0, 1)$
— 0 — 0 —

Teorema (Weierstrass) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua,

(ii) A è compatto.

Allora esistono per forza

$$\max \{ f(x) : x \in A \} = \max f(A)$$

$$\min \{ f(x) : x \in A \} = \min f(A)$$

Dim Caso del max (l'altro è analogo)

Sia $S := \sup \{ f(x) : x \in A \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Per il lemma solito esiste una successione $\{y_n\} \subseteq f(A)$

taile che $y_n \rightarrow S$

Per definizione di immagine $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in A$.

Ora $\{x_n\} \subseteq A$, che è compatto, quindi

$$\exists x_{n_k} \rightarrow x_\infty.$$

Claim: x_∞ è un p.to di max. Infatti

$$f(x_\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = S$$

$\uparrow$ f è cont. $\uparrow$ def. di x_n $\uparrow$ s.succ. $\uparrow$ proprietà degli y_n

Solo alla fine S suette di poter essere $+\infty$

— 0 — 0 —

Interpretazione Le funzioni continue mandano compatti per succ. in compatti per succ.

Detto meglio: se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $f(A)$ è compatto (tutto per succ.)

Dim Sia $\{y_n\} \subseteq f(A)$ e voglio trovare $y_{n_k} \rightarrow y_\infty \in f(A)$.

Scrivo $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in A$. Per cpt. di A trovo $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Allora $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_\infty) =: y_\infty \in f(A)$

$\uparrow$
 f continua

Weierstrass rivisto : A compatto + f continua

$\rightarrow f(A)$ compatto

$\Rightarrow f(A)$ ammette max/min

$\uparrow$
Lemma/esercizio

Oss. Le funzioni continue

$\rightarrow$ non mandano limitati in limitati

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad A = (0, 1) \rightsquigarrow f(A) = (1, +\infty)$$

$\rightarrow$ non mandano chiusi in chiusi

$$f(x) = \arctan x \quad A = [0, +\infty) \rightsquigarrow f(A) = [0, \frac{\pi}{2})$$

FUNZIONI SEMICONTINUE Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$

Diciamo che f è semicontinua inferiormente (SCI) in x_0 se

$\rightarrow$ o x_0 è isolato in A

$\rightarrow$ o vale che

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

... superiormente (SCS) in x_0 se ...

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

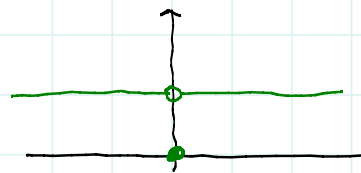
Oss. Quando sono vere entrambe

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

e quindi f è continua in x_0 .

Esempio 1

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

In $x=0$ è SCI

Morale : le SCI al limite possono solo crollare
 le SCS " " " " crescere

Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x=0 \end{cases}$$

Questa è (in $x=0$)→ SCI se $a \leq -1$ → SCS se $a \geq 1$ Esempio 3 La funzione caratteristica di un insieme A , cioè

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$



risulta → SCI se A è aperto
 → SCS se A è chiuso.

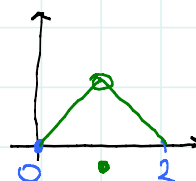
Teorema Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che(i) f SCI in ogni p.to di A ,(ii) A compatto e $\neq \emptyset$.

Allora esiste per forza

$$\min \{ f(x) : x \in A \}$$

Oss. Non esiste nec. il max

$$A = [0, 2]$$



Dim Di sicuro esiste

$$I : \sup \{ f(x) : x \in A \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

$$= \inf f(A)$$

Per il solito lemma

$$\exists \{y_m\} \subseteq f(A) \quad \text{t.c.} \quad y_m \rightarrow I$$

Per def. di immagine

$$\exists \{x_m\} \subseteq A \quad \text{t.c.} \quad y_m = f(x_m)$$

Per compattezza

$$\text{esiste } x_{m_k} \rightarrow x_\infty \in A$$

Claim: x_∞ è pto di min.

In fatti

$$I = \lim_{m \rightarrow +\infty} y_m$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{m_k} \quad (\text{sottosucc.})$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{m_k}) \quad (\text{def. di } y_m \text{ e } x_m)$$

$$\geq \liminf_{x \rightarrow x_\infty} f(x) \quad (\text{versione s.succ. della sci})$$

$$\geq f(x_\infty) \quad (\text{sci.})$$

$$\geq I \quad (\text{perché } I = \inf)$$

quindi è finita

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 103

Note Title

15/04/2026

Teorema (Tre facce della compattezza)

Per un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti i seguenti 3 fatti

(i) A è chiuso + limitato (un giorno completo + tot. limitato)

(ii) A è cpt. per succ.

(iii) A è cpt. per ricoprimenti

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Dimostrato in una lezione precedente

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ipotesi: A è cpt. per ricoprimenti

Tesi: limitato + chiuso

Limitato Pseudo $U_n := (-n, n)$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$

Ovvio che $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n = \mathbb{R}$

Per ipotesi esiste $m_0 \geq 1$ t.c. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m_0} U_n = (-m_0, m_0)$

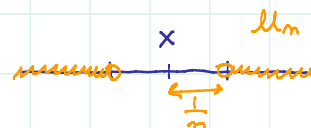
$\Rightarrow A$ è limitato.

Chiuso Pseudo $x \in \text{Clos}(A)$. Voglio dir. che $x \in A$.

Se non ci stes, considero

$$U_n = \mathbb{R} \setminus [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$$

$\uparrow$ aperto



Ora $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} U_n = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ (vogliamo che $x \notin A$)

Ma allora esiste $m_0 \geq 1$ t.c. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m_0} U_n = \mathbb{R} \setminus [x - \frac{1}{m_0}, x + \frac{1}{m_0}]$

Ma allora $[x - \frac{1}{2m_0}, x + \frac{1}{2m_0}] \cap A = \emptyset \Rightarrow x \in \text{Clos}(A)$.

Dim (i) o (ii) implicano (iii)

LEMMA (Raggio magico) [Numero di LEBESGUE]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ cpt. per succ.

Sia $\{I_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di A .

Allora

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists i \in I \quad [x-r, x+r] \subseteq I_i$$

↑ raggio magico

Brutalmente: ogni $x \in A$ sta "bello comodo" in almeno uno degli I_i ,
cioè ci sta insieme a tutto l'intervallo $[x-r, x+r]$.

LEMMA (dei distributori) [ϵ -rete]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato, e sia $\epsilon > 0$.

Allora esiste un numero finito di p.ti $x_1, \dots, x_n$ in A tali che

$$\forall x \in A \quad \exists i \in \{1, \dots, n\} \quad |x - x_i| \leq \epsilon$$

Brutalmente: posso piazzare un numero finito di distributori in A
in modo che ogni p.to di A abbia un distributore
a distanza $\leq \epsilon$.

Dim (ii) $\Rightarrow$ (iii) usando i lemmi

Mi viene dato un ricoprimento $\{I_i\}_{i \in I}$. Voglio trovare un
s. ricopr. finito.

Prendo il raggio magico r del ricoprimento.

Scelgo $x_1, \dots, x_n$ come r -rete di distributori

Prendo $I_{i_1}, \dots, I_{i_n}$ che contengano gli n distributori
insieme al loro intorno di ampiezza r , cioè

$$[x_j - r, x_j + r] \subseteq I_{i_j} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

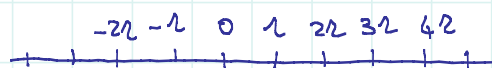
Claim: $I_{i_1}, \dots, I_{i_n}$ ricoprono.

Questo segue dal fatto che

→ ogni $x \in A$ sta in un qualche $[x_j - \epsilon, x_j + \epsilon]$

→ l'ultimo intervallo sta in $\mathcal{M}_j$.

Dini distributori



Basta considerare la griglia $k\epsilon$ con $k \in \mathbb{Z}$
e gli intervalli $[k\epsilon, (k+1)\epsilon]$.

Solo un # finito di questi interseca A (che è limitato)

Prendo un x_i in ciascuna di queste intersezioni non vuote.

— o — o —

Dini raggio magico

Tesi

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists i \in I \quad [x - \epsilon, x + \epsilon] \subseteq \mathcal{M}_i$$

Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \forall i \in I \quad [x - \epsilon, x + \epsilon] \not\subseteq \mathcal{M}_i$$

↑ qualunque cosa che tende a 0.

Me la gioco con $\epsilon = \frac{1}{n}$. Trovo $x_n \in A$ t.c.

$$\forall i \in I \quad [x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n}] \not\subseteq \mathcal{M}_i \quad (*)$$

Ora ho una succ. $\{x_n\}$. Per ipotesi $\exists x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in A$

Prendo $i_\infty \in I$ tale che $x_\infty \in \mathcal{M}_{i_\infty}$. Essendo aperto

$$\exists \epsilon_\infty > 0 \quad \text{t.c.} \quad (x_\infty - \epsilon_\infty, x_\infty + \epsilon_\infty) \subseteq \mathcal{M}_{i_\infty}$$



Ora gli x_{n_k} stanno

convergendo a x_∞ , quindi

per k grandi stanno belli comodi in $\mathcal{M}_{i_\infty}$

Più formale: per k grande $x_{n_k} \in [x_\infty - \frac{\epsilon}{2}, x_\infty + \frac{\epsilon}{2}]$
e quindi anche

$$[x_{n_k} - \frac{\epsilon}{2}, x_{n_k} + \frac{\epsilon}{2}] \subseteq \mathcal{U}_{i_\infty}$$

il che contraddice la (*) non appena $\frac{1}{n_k} < \frac{\epsilon}{2}$.

— o — o —

Prop Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è cpt. per ricoprimenti e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $f(A)$ è cpt. per ricoprimenti.

Dim. Mi viene dato un ricoprimento aperto di $f(A)$, cioè

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i$$

Voglio trovare un s. ric. finito.

Pongo $\mathcal{U}_i := f^{-1}(V_i)$. Osservo che gli $\mathcal{U}_i$ sono aperti (per lo meno in A , perché f è continua, il che vuol dire che

$$f^{-1}(\text{aperto}) = \text{aperto in } A)$$

e ricoprono A , cioè

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

Poiché A è cpt. per ricoprimenti, esiste s. ricopr. finito, cioè

$$A \subseteq \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_m} \quad \text{con } i_1, \dots, i_m \in I.$$

$$\text{Claim: } f(A) \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$$

Praticamente ovvio: se $y \in f(A)$, prendo $x \in A$ t.c. $y = f(x)$, prendo k t.c. $x \in \mathcal{U}_{i_k}$ con $k = 1, \dots, m$ e deduco che $y \in f(\mathcal{U}_{i_k}) = V_{i_k}$.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 104

Note Title

15/04/2026

COMPLETEZZA DEI REALI

SUCCESIONI DI CAUCHY

Def. Una successione $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ si dice **DI CAUCHY** se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 \forall n \geq n_0 \quad |x_m - x_n| \leq \varepsilon$$

Brutalmente: definitivamente stanno tutti vicini-vicini

FATTO 1 Le successioni che hanno limite reale sono di Cauchy.

Dim Sia $x_n \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$.

Per def. di limite trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|x_n - x_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

Ma allora per ogni $n \geq n_0$ e ogni $m \geq n_0$ vale

$$|x_n - x_m| \leq \underbrace{|x_n - x_\infty|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} + \underbrace{|x_\infty - x_m|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} \leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon \quad \therefore$$

FATTO 2 Le succ. di Cauchy sono limitate.

Dim Defin. stanno tutti vicini-vicini e prima sono # finito

Uso def. di succ. di Cauchy con $\varepsilon = 2026$. Trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ e so che

$$|x_n - x_{n_0}| \leq 2026 \quad \forall n \geq n_0$$

↑
 n

$$\text{cioè} \quad x_{n_0} - 2026 \leq x_n \leq x_{n_0} + 2026 \quad \forall n \geq n_0$$

Ma allora (posso sempre supporre $n_0 \geq 1$)

$$x_m \leq \max \{ x_{n_0+2026}, x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1} \}$$

e

$$x_m \geq \min \{ x_{n_0-2026}, x_0, x_1, \dots, x_{n_0-1} \} \quad \text{!}$$

FATTO 3 Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una succ. di Cauchy

Supponiamo che esista una s.succ. convergente, diciamo

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in \mathbb{R}$$

Allora

$$x_n \rightarrow x_\infty \quad (\text{tutta quanta tende allo stesso limite})$$

Dim Sono dei percorsi: se una s.succ. va a x_∞ , gli vanno dietro tutti.

Devo dire che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad |x_n - x_\infty| \leq \varepsilon$.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$.

Essendo x_n di Cauchy

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_1 \forall n \geq n_1 \quad |x_m - x_n| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Poiché $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$, avremo $|x_{n_k} - x_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall k$ abbastanza

grande, diciamo $k \geq k_0$
 $\uparrow$
 a meno di prendere
 un k più grande,
 posso sempre
 assumere $n_{k_0} \geq n_1$

Allora posso

$$n_0 := \max \{ n_1, n_{k_0} \} = n_{k_0}$$

e per ogni $n \geq n_0$ avrò che

$$|x_n - x_\infty| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_{k_0}}|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} + \underbrace{|x_{n_{k_0}} - x_\infty|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} \leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

Qui abbiamo usato
che $n_{k_0} \geq n_1$

Teorema (Viceversa del fatto 1).

Le succ. di Cauchy hanno per forza limite reale

DIM 1 Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ di Cauchy

→ Per il fatto 2 è limitata

→ Per Bolzano-Weierstrass esiste s.succ. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

→ Per il fatto 3 tutta $x_n \rightarrow x_\infty$.

DIM 2 → Per il fatto 2 è limitata

→ di sicuro esistono finiti il $\limsup L$ e il $\liminf l$

→ Basta dimostrare che $L - l = 0$, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad L - l \leq \varepsilon$$

Essendo di Cauchy

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon \quad \text{per } n \text{ ed } m \geq n_0$$

e quindi prendendo $m = n_0$ ottengo

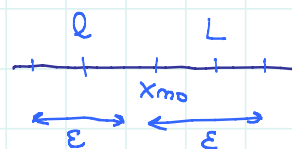
$$x_{n_0} - \varepsilon \leq x_n \leq x_{n_0} + \varepsilon$$

Passando $n \rightarrow +\infty$ concludo

$$x_{n_0} - \varepsilon \leq l \leq L \leq x_{n_0} + \varepsilon$$

da cui $L - l \leq 2\varepsilon$

$$\text{---} \quad 0 \quad \text{---} \quad 0 \quad \text{---}$$



Teorema Sia a_n una succ. di reali. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

DIM 1 Via Carabini per serie $\leadsto$ basata sull'ordinamento

DIM 2 Introduciamo le somme parziali

$$S_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

$$\hat{S}_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$$

non lo stesso
per forza

Ipotesi: $\hat{S}_n$ ha limite reale

Tesi: S_n ha limite reale $\uparrow$

Basta dim. che S_m è di Cauchy.

Osservo che, per $m > n$ vale che

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^m a_k$$

quindi

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = \hat{S}_m - \hat{S}_n$$

Finale: $\hat{S}_m$ ha limite, quindi $\hat{S}_m$ è di Cauchy, quindi RHS $\leq \varepsilon$ per n ed m grandi, quindi LHS $\leq \varepsilon$ per n ed m grandi, quindi S_m è di Cauchy, quindi S_m ha limite.
— o — o —

La completezza (cioè il fatto che le succ. di Cauchy convergono) è una proprietà che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$, ed è sostanzialmente equivalente all'assioma di continuità.

Proprietà archimedeica dei reali $\forall r \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } m > r$

FATTO Se in un campo ordinato valgono propr. archimedeica + completezza, allora vale l'assioma di continuità

Idea Prendo A a.s. di B e voglio un separatore

lodo per bisezione

Prendo $a \in A$ e $b \in B$. Prendo il p.to



medio: o separa, o sta da una delle due parti

Procedo allo stesso modo e ottengo una succ. c_m tale che

$$|c_{m+1} - c_m| \leq \frac{b-a}{2^m}$$

Claim: questa è di Cauchy e converge ad un separatore vero.
Dove ho usato l'Archimedeica? Expert mode: serve davvero?

ANALISI 1 - LEZIONE 105

Note Title

16/04/2026

UNIFORME CONTINUITÀ (aka continuità quantitativa)

Setting: $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Def. (Funzione continua in A) Si dice che f è CONTINUA in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in A \exists \delta > 0 \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \cap A \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

vicini in partenza $\leadsto$ vicini in arrivo

Altro modo di dirlo

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in A \exists \delta > 0 \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

dipende da ε ed x

Def. (Funzione uniformemente continua in A) Si dice che f è u.c. in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

*dipende solo da ε
e vale per tutti gli x*

Morale: se voglio che $f(x)$ e $f(y)$ siano vicini a meno di ε , basta che prenda x e y vicini a meno di δ

Finestra sul futuro: la continuità è topologica (locale)

l'uniforme continuità è metrica (globale).

Esempio 1 Se f è Lipschitziana in A , allora f è u.c. in A

Sappiamo che $|f(y) - f(x)| \leq L|x - y|$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Prendo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ e sono sicuro che va bene.

Se $|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{L}$, allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon \quad \ddot{\smile}$$

Esempio 2 $f(x) = x^2$ è u.c.? Dove?

in $[0, 2026]$ SÌ! Derivata limitata $\Rightarrow$ Lip $\Rightarrow$ u.c.

in $[0, +\infty)$ NO! Derivata non lim $\Rightarrow$ non Lip $\Rightarrow$ BOH!!

Uso definizione negata: devo trovare x e y "vicini" con immagini "lontane"

Prendo x e $y = x + \delta$

$$f(y) - f(x) = (x + \delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2$$

Se prendo $x = \frac{1}{\delta}$ ho trovato due p.ti x e y con $|y - x| \leq \delta$ e $f(y) - f(x) \geq 2$

Morale: se nella parabola vado molto a dx trovo p.ti vicini quanto voglio le cui immagini distano ≥ 2

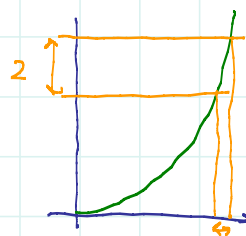
Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$ è u.c. in $[0, +\infty)$?

SÌ! Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare δ universale.

Provo con $\delta = \varepsilon^2$. Se $|x - y| \leq \varepsilon^2$, allora

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2}} = \varepsilon \quad \ddot{\smile}$$

$\uparrow$ razion. $\uparrow$ almeno uno tra x e y è $\geq \varepsilon^2$



Morale: se voglio $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ lontani con $|x-y| \leq \delta$, il caso peggiore è quando $x=0$ e $y=\delta$. Quindi $\sqrt{\delta} = \varepsilon \leadsto \delta = \varepsilon^2$

Proprietà funz. unif. cont.

① Se f e g sono u.c. in $A \Rightarrow f+g$ è u.c. in A

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Prendo δ_1 t.c. $|x-y| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$
 δ_2 t.c. $|x-y| \leq \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$

Prendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora se $|x-y| \leq \delta$ succede che

$$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| \leq \varepsilon \quad \text{c} \\ \leq \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \qquad \qquad \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

② Se f è u.c. in A e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$ è u.c. in A

Brutta: $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| |f(x) - f(y)| \leq |\lambda| \dots \leq \varepsilon$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Allora trovo $\delta > 0$ tale che

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

Concludo con lo stesso δ come nella brutta.

In realtà devo trattare a parte il caso $\lambda = 0$, ma non è difficile.

③ Se f e g sono u.c. in $A \Rightarrow f \cdot g$ è u.c. in A ?

NO! $f(x) = x = g(x)$ sono lip., quindi u.c. in $\mathbb{R}$, ma x^2 NO

④ Se f e g sono u.c. e limitate in $A \Rightarrow f \cdot g$ è u.c. in A

Brutta :

$$\begin{aligned}
 |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
 &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\
 &\leq M_f \cdot \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{M_f} + M_g \cdot \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{M_g} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Scelgo $\delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{M_g} \quad |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{M_f}$$

(posso sempre supporre M_f e $M_g \geq 2026$)

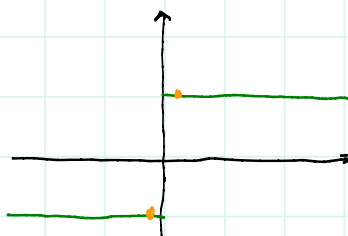
④.5 Domanda: e se solo una tra f e g è limitata?

⑤ Se f è u.c. in A e $B \subseteq A \Rightarrow f$ è u.c. in B ? **Ovvio**

⑥ f u.c. in A + f u.c. in $B \Rightarrow f$ è u.c. in $A \cup B$?

Oss. Per la continuità semplice è ovvio (la continuità è locale!)

Per u.c. NO!!



è u.c. in $(0, +\infty)$
e in $(-\infty, 0)$
ma non nell'unione!

6. safe $a < b < c$, f u.c. in $[a, b]$, f u.c. in $[b, c] \Rightarrow f$ u.c. in $[a, c]$?

Sì! Prendo il $\delta > 0$ che garantisce $\frac{\varepsilon}{2}$ nei due sottointervalli e questo va bene [a voce nel video].

ANALISI 1 - LEZIONE 106

Note Title

16/04/2026

Risultati sulle funzioni unif. continue

TEOREMI

→ HEINE - CANTOR

→ ESTENSIONE

TEOREMI

→ SUBLINEARITÀ

→ ASINTOTICA A U.C. $\Rightarrow$ U.C.**LEMMA** (Le funzioni U.C. mandano succ. di Cauchy in succ. di Cauchy)Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont.Sia $\{x_n\} \subseteq A$ una succ. di Cauchy.Allora $\{f(x_n)\}$ è una succ. di CauchyOss. È falso se f è solo continua $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy, ma $f(x_n) = n$ non lo è

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ma il suo limite non è
nella zona di continuità di f **Dim Lemma** Voglio che $f(x_n)$ sia di Cauchy, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon \quad \text{per } n, m \text{ "grandi"}$$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$.Per U.C. di f trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Essendo x_n di Cauchy, dato $\delta > 0$ trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|x_n - x_m| \leq \delta \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

Questo è il valore n_0 che cercavo perché $|f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon$.

Teorema di estensione Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont.

Allora (posso estendere f alla chiusura)

esiste un' unica

$$\hat{f} : \text{Clos}(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

che è unif. cont. e tale che

$$\hat{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Dim **Step 1** Definisco $\hat{f}$.

Prendo $x \in \text{Clos}(A)$.

Per il solito lemma esiste $\{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \rightarrow x$

Essendo conv., la succ. $\{x_n\}$ è di Cauchy

Per il lemma precedente, anche $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy, quindi ha limite.

Pongo

$$\hat{f}(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

Step 2 La definizione è ben posta, cioè non dipende dalla succ. $x_n \rightarrow x$ che ho scelto. Cioè se $x'_n \rightarrow x$, allora

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = l'$$

Modo elegante Considero la succ. alternata

$$x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', \dots$$

Questa ancora converge a x e quindi $f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2')$... converge a qualcosa, diciamo l , quindi anche sui pari e sui dispari converge ad l .

Modo bonino Fisso $\varepsilon > 0$. Per u.c. ottengo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ora per n grande $|x_n - x'_n| \leq \delta$, ma allora

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}$$

e passando al limite $|l - l'| \leq \varepsilon$

Step 3 $\hat{f}$ estende f , cioè $\hat{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$

Se $x \in A$, posso prendere $x_n \equiv x$, quindi $f(x_n) \equiv f(x)$, quindi è ovvio che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Step 4 $\hat{f}$ è U.C.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e voglio trovare $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon$$

Prendo il δ che corrisponde ad ε nella U.C. di f , e prendo un qualunque $\hat{\delta} \in (0, \delta)$. Dico che questo va bene.

Considero succ. $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Osservo che se

$$|x - y| \leq \hat{\delta}, \text{ allora } |x_n - y_n| \leq \delta \text{ per } n \text{ grande, da cui}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}$$

e passando al limite

$$|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon$$

— o — o —

Questione: esiste un caso in cui il δ per f non va bene per $\hat{f}$?

— o — o —

Conseguenza: se f NON si estende, allora f non è U.C.

Esempio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $(0, 1)$ è continua, ma non U.C. perché non la posso estendere in $x=0$

— o — o —

Teorema (Heine - Cantor) Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in A ,

(ii) A è compatto.

Allora f è U.C. in A .

DIM 1 (Per assurdo via cpt. per succ.)

Devo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Se non fosse vero

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A \exists y \in A \quad |x-y| \leq \delta \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ (oppure $\delta = \frac{1}{2026^n}$)

Otengo x_n e y_n in A t.c.

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$$

Poiché A è cpt. per succ esiste $x_{m_k} \rightarrow x_\infty$. Ma allora anche $y_{m_k} \rightarrow x_\infty$ dal momento che

$$x_{m_k} - \frac{1}{m_k} \leq y_{m_k} \leq x_{m_k} + \frac{1}{m_k}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Ma allora} & |f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})| > \varepsilon_0 \\ & \downarrow \quad \quad \downarrow \\ & f(x_\infty) \quad f(x_\infty) \end{array}$$

da cui $0 \geq \varepsilon_0$, il che è un problema. ϵ
— 0 — 0 —

DIM 2 (Diretta via cpt. per ricoprimenti)

Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e vorrei $\delta > 0 \dots$

Essendo f continua

$$\forall x \in A \exists \delta(x, \varepsilon) > 0 \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Se ora considero $y_1 \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$

$y_2 \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$

ho che

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_2)| &\leq |f(y_1) - f(x)| + |f(y_2) - f(x)| \leq \varepsilon \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \quad \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ora osservo che $U_x = (x - \delta(x), x + \delta(x))$
è un ricoprimento aperto di A , quindi ammette un s.ricopr.
finito, e quindi c'è un δ positivo comune.

Grosso problema: quando prendo due p.ti x e y in A con
 $|x - y| \leq \delta$, non è detto che questi stiano
nello stesso aperto del s.ricopr. finito!

Via d'uscita! Non prendo il sottoricopr. finito e il δ più piccolo,
ma prendo il RAGGIO MAGICO del ricoprimento.
Se $|x - y| \leq$ raggio magico, allora x e y stanno
in uno stesso aperto del ricopr. iniziale, e
quindi tutto va bene.

Oss. Il raggio magico si dimostra comunque per assurdo.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 107

Note Title

20/04/2026

Teoremi sulle funzioni unif. cont.

→ asintotico a costante $\Rightarrow$ unif. cont.

→ unif. cont. $\Rightarrow$ sublineare

Prop. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (esiste variante su $(-\infty, a]$)

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste ed è reale.

Allora f è unif. cont. in $[a, +\infty)$.

Dim Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e devo trovare $\delta > 0$ t.c.

$$x \geq a, y \geq a, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Dall'ipotesi (ii) segue, detto l il limite,

$$\exists A \geq a \quad \forall x \geq A \quad |f(x) - l| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Per l'ipotesi (i) + Weierstrass sappiamo che f è unif. cont.

in $[a, A + 2026]$, quindi

$$\exists \hat{\delta} > 0 \quad \forall x \in [a, A + 2026] \quad \forall y \in [a, A + 2026] \quad |x - y| \leq \hat{\delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Pongo

$$\delta := \min \{ \hat{\delta}, 2026 \}$$

deve essere lo stesso usato sopra
(oppure di meno)

e claimo che va bene.

Infatti, prendiamo $x \geq a$ e $y \geq a$ con $|x - y| \leq \delta$.

- Se sia x sia y sono $\geq A$, allora

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

- Se sia x sia y sono $\leq A+2026$, allora stanno in $[a, A+2026]$ e quindi OK per def. di $\hat{\delta}$.

- Non ci può essere un terzo caso perché x e y distano ≤ 2026 (se uno dei due è $\geq A+2026$, allora automaticamente siamo nel primo caso)



— o — o —

Corollario Siano $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f cont. in $[a, +\infty)$

(ii) g unif. cont. in $[a, +\infty)$

(iii) $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Allora f è unif. cont. in $[a, +\infty)$.

Dim $f(x) = \boxed{g(x)} + \boxed{f(x) - g(x)}$

$\uparrow$ u.c. $\uparrow$ unif. cont. per la Prop. prec.
 per ipotesi (è cont. e $\rightarrow 0$)

— o — o —

Prop Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f: [a, +\infty)$ una funz. unif. cont.

Allora f è sublineare, cioè esistono A e B reali tali che

$$f(x) \leq A(x-a) + B \quad \forall x \geq a$$

(cioè f sta sotto una retta).

Def. Uso la def. di unif. cont. con $\varepsilon = 1$. Trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Claim: vale la tesi con

$$B := \max \{ f(x) : x \in [a, a+\delta] \}$$

$$A := \frac{1}{\delta}$$



Dimostro che la tesi vale in

$$[a+k\delta, a+(k+1)\delta] \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}$$

Uso di induzione

- $k=0$. Praticamente è la def. di B

$$f(x) \leq B \leq B + \underbrace{A(x-a)}_{\geq 0}$$

- $k \Rightarrow k+1$. Dato x prendo $x-\delta$ che sta nell'intervallo prec. e quindi

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x-\delta) + 1 \\ &\leq A(x-\delta-a) + B + 1 \end{aligned}$$

hp invariante $\uparrow$

$$= \frac{1}{\delta}(x-\delta-a) + B + 1$$

$$= \frac{1}{\delta}(x-a) - \cancel{1} + B + \cancel{1}$$

$$= Ax + B$$

— o — o —

Esercizio. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$

U.C. in $[1, +\infty)$? No! Cresce come $x^{3/2}$, quindi non sublineare

U.C. in $[-1, 1]$? Sì! H-C

U.C. in $(-3, 3)$? Sì! Lo è in $[-3, 3]$ ☺

$\frac{\sqrt{1+x^3}}{x}$ U.C. in $[1, +\infty)$? Sì! $\rightarrow$ asintotica a $\sqrt{x}$
 $\rightarrow$ lipschitziana

FUNZIONI HÖLDERIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $\alpha \in (0, 1]$.

Si dice che f è α -Hölderiana in A se esiste $H \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^\alpha \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

$\uparrow$ con $\alpha = 1$ è Lipschitz

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$ con $A = [0, +\infty)$

Dico che è $\frac{1}{2}$ -Hölder e più precisamente

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1/2}$$

$\uparrow$ costante 1

Dim $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$

wlog $x \geq y$, quindi $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$, cioè $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x - y}$

Essendo tutto ≥ 0 faccio i $\square$ e concludo.

Esempio 2 $f(x) = x^\alpha$ è α -Hölderiana in $[0, +\infty)$ per ogni $\alpha \in (0, 1]$.

Dim Devo dire che $x^\alpha - y^\alpha \leq (x - y)^\alpha$ per ogni $x \geq y \geq 0$

$\uparrow$ costante 1

Penso y come parametro, e studio la funzione

$$\varphi(x) := (x - y)^\alpha + y^\alpha - x^\alpha \quad \text{per } x \geq y$$

per $x = y$ viene $\varphi(y) = 0$, e inoltre

$$\varphi'(x) = \alpha (x - y)^{\alpha - 1} - \alpha x^{\alpha - 1} = \alpha \left\{ \frac{1}{(x - y)^{1 - \alpha}} - \frac{1}{x^{1 - \alpha}} \right\} \geq 0$$

$\uparrow$ più grande perché denum. più piccolo.

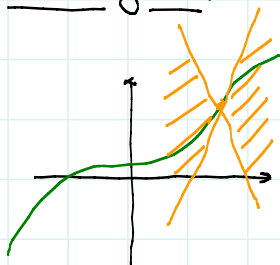
Oss. Le funzioni Hölder con $\alpha > 1$ sarebbero solo le costanti, almeno sugli insiemi convessi.

Dim La derivata sarebbe nulla ovunque!

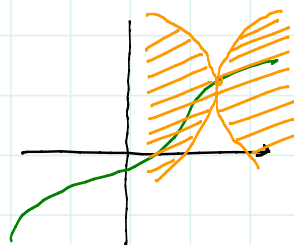
$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M \cdot |h|^\alpha}{h}$$

e se $\alpha > 1 \dots$

Idea geom.



Lip: il grafico sta sempre dentro una "farfalla" con pendenza $\pm L$



Hölder: farfalla "a radice"

ANALISI 1 - LEZIONE 108

Note Title

20/04/2026

PROPRIETÀ FUNZIONI HÖLDERIANE

① Somma / Differenza: f e g α -Hölder in $A \Rightarrow f \pm g$ idem

Dim. $|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$
 $\leq M_f |x - y|^\alpha + M_g |x - y|^\alpha$
 $= (M_f + M_g) |x - y|^\alpha$

Idem per la differenza

② Prodotto per una costante: f α -Hölder in $A \Rightarrow \lambda f$ α -Hölder in A

Dim. $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)|$
 $\leq |\lambda| \cdot M_f |x - y|^\alpha$

③ Prodotto di 2 Hölder: va male anche per le Lip...

④ f e g Hölder + limitate in $A \Rightarrow f \cdot g$ è Hölder in A

Dim. $|f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \leq |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(x)|$
 $+ |f(y) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)|$
 $\leq \underbrace{M_g}_{\substack{\uparrow \\ \text{bound} \\ \text{su } g}} \cdot M_f |x - y|^\alpha + M_f \cdot M_g |x - y|^\alpha = (\dots) \cdot |x - y|^\alpha$

⑤ Lip $\Rightarrow$ Hölder? NO! anzi NO!

$f(x) = x$ è Lip. in $\mathbb{R}$, ma NON è $\frac{1}{2}$ Hölder! (le funzioni $\frac{1}{2}$ Hölder crescono al più come $x^{1/2}$)

$$\boxed{5.1} \quad \left. \begin{array}{l} A \text{ limitato} \\ f \text{ } a\text{-Hölder in } A \\ b \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ } b\text{-Hölder in } A$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad |f(x) - f(y)| &\leq M_a |x-y|^a & M_p: f \text{ è } a\text{-Hölder} \\ &= M_a |x-y|^{a-b} |x-y|^b \\ &\leq M_a \cdot \underbrace{(\text{diam } A)^{a-b}}_{\sup A - \inf A} |x-y|^b \\ &= M_b |x-y|^b \end{aligned}$$

$$\boxed{5.2} \quad \left. \begin{array}{l} f \text{ } a\text{-Hölder in } A \\ f \text{ limitata in } A \\ b \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ } b\text{-Hölder in } A$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad |f(x) - f(y)| &= \underbrace{|f(x) - f(y)|^{1-\frac{b}{a}}}_{\leq (2M_f)^{1-\frac{b}{a}}} \cdot \underbrace{|f(x) - f(y)|^{\frac{b}{a}}}_{\leq \{M_f |x-y|^a\}^{\frac{b}{a}}} \\ &\leq \underbrace{(2M_f)^{1-\frac{b}{a}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{diam.} \\ \text{in arrivo}}} \cdot |x-y|^b \\ &\leq \dots \cdot |x-y|^b \end{aligned}$$

[6] Composizione: f a -Hölder, g b -Hölder $\Rightarrow g \circ f$ ab -Hölder

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad |g(f(x)) - g(f(y))| &\leq M_g |f(x) - f(y)|^b \\ &\leq M_g M_f^b |x-y|^{ab} \end{aligned}$$

Domanda: cosa succede nel prodotto se solo una delle due è limitata

L'ESERCIZIO f^2 Lip $\Leftrightarrow f$ $\frac{1}{2}$ -Hölder

$\Leftarrow$ NOPE! $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ è $\frac{1}{2}$ Hölder in $[0, +\infty)$
 $f(x)^2 = 1 + x + 2\sqrt{x}$ non è meglio di $\frac{1}{2}$ -Hölder..

$\Rightarrow$ NOPE! $f(x) \in \{+1, -1\}$ a caso. Il $\square$ è costante!

Prop. (Criterio di Hölderianità)

Supponiamo $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e $|f|^{\frac{1}{a}}$ sia Lipschitz.

Supponiamo inoltre A connesso.

Allora f è a -Hölder in A .

Dim $|f(x) - f(y)| = | (f(x)^{\frac{1}{a}})^a - (f(y)^{\frac{1}{a}})^a |$

$$|A^a - B^a| \leq |A - B|^a \leq H |f(x)^{\frac{1}{a}} - f(y)^{\frac{1}{a}}|^a$$

(let. pec.)

$$\begin{aligned} &\leq H [L |x - y|]^a \\ &\quad \uparrow \\ &f^{\frac{1}{a}} \text{ è Lip} \\ &\leq H \cdot L^a \cdot |x - y|^a \end{aligned}$$

Sigh! Errore di percorso nello scrivere $f(x) = [f(x)^{\frac{1}{a}}]^a$ $\ddot{\smile}$

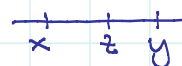
Come la salviamo?

Caso 1 Se $f(x) \geq 0$ e $f(y) \geq 0$, allora ok

Caso 2 Se $f(x) \leq 0$ e $f(y) \leq 0$, allora si aggiusta con un segno-

Caso 3 Se $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$ (o viceversa), allora esiste z compreso tale che $f(z) = 0$ (ho usato connessione e continuità)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \\ &\leq \dots |x - z|^a + \dots |y - z|^a \\ &\leq \dots |x - y|^a + \dots |x - y|^a \end{aligned}$$



Esempio $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ in $(0,1)$

Q1 È unif. cont.?

Certo! La estendo a $[0,1]$ ponendo $f(0)=0$ e $f(1)=\sin 1$
Così risulta continua, quindi U.C. per H.C.
e $(0,1)$ è solo più piccolo.

Q2 È lip.?

Certo che NO! $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - x \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$

e questa di sicuro non è limitata

Q3 Quanto è Hölder?

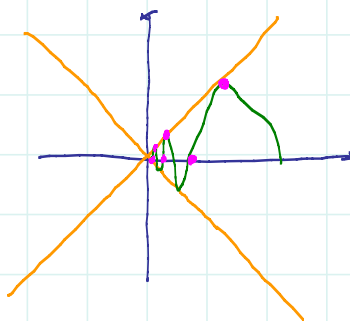
Almeno fino a $\frac{1}{2}$!! Spero che $f(x)^2 = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ sia Lip

La derivata è $2x \cdot \sin^2 \frac{1}{x} + x^2 \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})$

quindi la derivata di $f(x)^2$ è limitata!

Q4 e per $\alpha > \frac{1}{2}$?

Non è più Hölderiana, ma va fatto
usando la definizione



ANALISI 1 - LEZIONE 109

Note Title

22/04/2026

Lipschitz $\Rightarrow$ Hölder $\Rightarrow$ unif. cont. $\Rightarrow$ cont.
 $\uparrow$
 se f è limit.

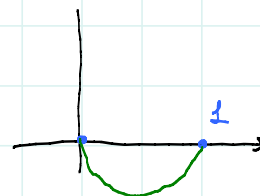
Hölder $\Rightarrow$ u.c.Ipotesi: $|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^a$ Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \dots |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

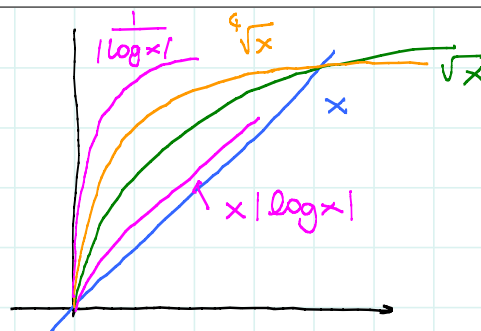
Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Pongo (... voglio $H \delta^a \leq \varepsilon \rightsquigarrow \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/a}$)

$$\delta := \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/a}$$

e per ipotesi

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^a \leq H \delta^a = \varepsilon \quad \square$$

Notazione $C^0 \rightsquigarrow$ funzione continua $C^1 \rightsquigarrow$ funzione derivabile $C^{0,\alpha} \rightsquigarrow$ funzione α -Hölder $\alpha \in (0,1]$ $C^{2026,\alpha} \rightsquigarrow$ funzione derivabile 2026 volte con $f^{(2026)}$ che è α -Hölder $C^{0,1} \rightsquigarrow$ funzione LipschitzEsempio 1 Voglio $f \in C^{0,\alpha}$ per ogni $\alpha \in (0,1)$, ma $f \notin C^{0,1}$.Claim: $f(x) = x \cdot \log x$ (N.B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$)NON è lip. in $(0,1)$ perché $f'(x)$ non è limitata.Dico che è α -Hölder per ogni $\alpha \in (0,1)$.Considero $|f(x)|^{1/\alpha}$ e dimostro che è lip.

Riassunto grafico

Def. (Modulo di continuità). Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se accade che

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x-y|) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

↑ omega

per una opportuna $\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, allora si dice che f è ω -continua ($C^{0,\omega}$).

Il caso interessante è quello in cui $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0$.

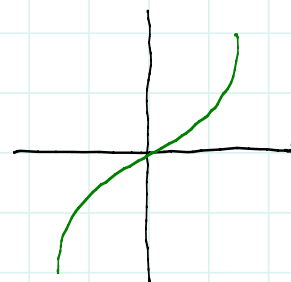
Esempio 3 $f(x) = \arcsin x$

In $[0, \frac{1}{2}]$: Lipschitz (derivata limitata)

In $[0, 1]$: NO Lip

o.c.? H.C.

$\frac{1}{2}$ -Hölder probabilmente



Dim. che non è più di $\frac{1}{2}$ -Hölder. Definizione negata

$$|\arcsin x - \arcsin y| \leq H |x-y|^a$$

Ne fa gioco con $x=1$ e $y=1-t$, o ancora meglio con $x=\sin \frac{\pi}{2}$ e $y=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

Mi ritrovo

$$\left| \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right| \leq H \left| \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right|^a$$

cioè

$$\theta \leq H |1 - \cos \theta|^a$$

da cui

$$\frac{(1 - \cos \theta)^a}{\theta} \geq \frac{1}{H} \quad \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^{1/a}} \right)^a \geq \frac{1}{H}$$

Ma a sx tende a 0 non appena $a > \frac{1}{2}$

— 0 — 0 —

Esempio 4 $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$

$$(0,1) \quad f'(x) = \underbrace{\frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{x}}_{\text{limitato}} - \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\text{limitato}} \rightsquigarrow \text{Lip.}$$

$$(1, +\infty) \rightsquigarrow \text{IDEM}$$

Esempio 5 $f(x) = \frac{\sin(x^3)}{x}$

$$(0,1) \quad f'(x) = \frac{\cos(x^3) \cdot 3x^2}{x} - \frac{\sin(x^3)}{x^2} \rightsquigarrow \text{ancora lip}$$

$$(1, +\infty) \quad f'(x) \text{ NON LIM} \Rightarrow \text{NO Lip}$$

f è u.c. perché continua + tende a 0 all'infinito

Esempio 6 $f(x) = x^x$

$$(1, +\infty) \quad \text{NO u.c. (cresce troppo: non è sublineare)}$$

$$(0, 2026) \quad f(x) = e^{x \log x} \quad \text{NO LIP (basta fare la derivata)}$$

u.c. $\rightsquigarrow$ estendo + H.C.

$f \in C^{\alpha, \alpha}((0, 2026))$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$.

ANALISI 1 - LEZIONE 110

Note Title

22/04/2026

Teorema (Non più misterioso) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora f è integrabile in $[a, b]$.

Dim. Devo dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due step function φ_ε e ψ_ε tali che

$$\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

e

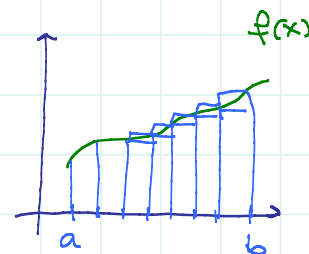
$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Essendo f U.C. per H.C. so che esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Costruisco φ_ε e ψ_ε usando una partizione con tutti intervallini lunghi $\leq \delta$ e scegliendo in ogni intervallo

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_\varepsilon = \min \\ \psi_\varepsilon = \max \end{array} \right\} \text{ esistono per W.}$$



Ora in ogni intervallo $\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ (sono due valori assunti in 2 p.ti a distanza $\leq \delta$) e quindi

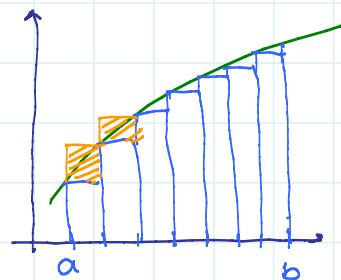
$$\int_a^b (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon \quad \square$$

Oss. Se so, per esempio, che f è α -Hölderiana in $[a, b]$, allora ho una stima dell'errore che commetto quando approssimo un integrale con una somma inferiore/superiore

Divido $[a, b]$ in pezzi di lung. $\leq \delta$, e poi calcolo la somma delle aree dei rettangoli costruiti usando il valore di $f(x)$ nell'estremo sinistro.

In ogni pezzettino l'errore è

$$\leq \underbrace{\text{lung. int.}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{H \cdot \delta^\alpha}_{\text{stima dell'altezza}}$$



Quando somma sugli intervalli ottengo

$$\text{errore} \leq \underbrace{(b-a)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{H \cdot \delta^\alpha}_{\text{stima dell'altezza}}$$

Teorema Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Allora

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 0 \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

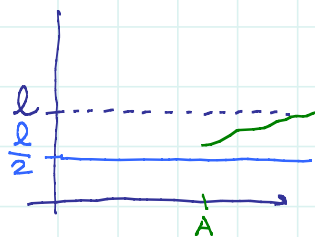
Dim Supponiamo $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$.

Allora $\exists A > a \quad \forall x \geq A \quad f(x) \geq \frac{l}{2}$

Allora

$$\begin{aligned} \int_a^B f(x) dx &= \int_a^A f(x) dx + \int_A^B f(x) dx \\ &\geq \int_a^A f(x) dx + \frac{l}{2} (B-A) \end{aligned}$$

$$\forall B \geq A$$

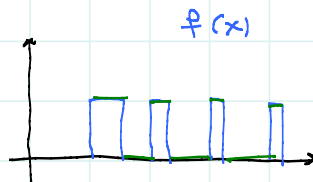


Quando mando $B \rightarrow +\infty$ ottengo che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty \quad \text{che è assurdo.}$$

Idem se $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L < 0$.

Esempio classico



base: $\frac{1}{n^2}$ altezza: 1 oppure base: $\frac{1}{n^3}$ altezza: n

Teorema Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uniform. cont. e tale che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Morale: se f va in alto, poi ci mette il suo tempo a scendere!

Dim Supponiamo come prima $L = \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$

Allora per caratterizzazione

$\exists x_n \rightarrow +\infty$ t.c.

$$f(x_n) \geq \frac{L}{2}$$



Usando l'U.C. con $\varepsilon = \frac{L}{4}$ trovo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{L}{4}$$

e quindi

$$f(x) \geq \frac{L}{4} \quad \forall x \in [x_n, x_n + \delta]$$

Ora considero

$$\int_a^{x_m+\delta} f(x) dx - \int_a^{x_m} f(x) dx = \int_{x_m}^{x_m+\delta} f(x) dx \geq \frac{L}{4} \cdot \delta$$

$\downarrow$ per $n \rightarrow +\infty$ tendono entrambi a $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

— 0 — 0 —

Esercizio Determinare la più piccola costante c tale che

$$|y e^{-y^2} - x e^{-x^2}| \leq c |x-y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Si tratta della costante di Lip., che a sua volta è uguale al sup di $|f'(x)|$.

Quindi basta studiare la funzione derivata.

Esercizio Determinare ... c tale che

$$||\sin(2x)|^{1/2} - |\sin(2y)|^{1/2}| \leq c |x-y|^{1/2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Si tratta della costante di $\frac{1}{2}$ -Hölder di $f(x) = |\sin(2x)|^{1/2}$

⊆ Ricordo $|\sqrt{A} - \sqrt{B}| \leq \sqrt{|A-B|}$ per ogni $A \geq 0, B \geq 0$
 La applico con $A = |\sin(2x)|$ e $B = |\sin(2y)|$ e ottengo

$$\begin{aligned} \text{LHS} &\leq \sqrt{||\sin(2x)| - |\sin(2y)||} && \text{uso } |\sin a - \sin b| \leq |a-b| \\ &\leq \sqrt{2|x-y|} = \sqrt{2} |x-y|^{1/2} && \leadsto c \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

⊇ Prendo $y=0$ e $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Ottengo $|\sin(2x)|^{1/2} \leq c \sqrt{x}$
 $\uparrow$ così seguiti +

cioè $\sqrt{\frac{\sin(2x)}{x}} \leq c$

Basta fare il limite per $x \rightarrow 0^+$ e abbiamo $c \geq \sqrt{2}$.

Esempio $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x})$ quanto è Hölder?

Sicuramente NON Lip (derivata)

Sicuramente $\frac{1}{3}$ -Hölder (composizione di Lip. e $\frac{1}{3}$ -Hölder)

L'unico problema sta in 0 (tant'è che lì è Lip.)

Idea: $\cos(\sqrt[3]{x}) = 1 - \frac{1}{2} x^{2/3} + \text{potenze con esp.} > 1$

no tira aia che sia $\frac{2}{3}$ -Hölder.

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 111

Note Title

23/04/2026

FUNZIONI CONVESSE

Def. (Combinazione convessa) Siano $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Una comb. conv. di x e y è un numero che si scrive nella forma

$$\lambda x + (1-\lambda)y \quad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

Oss. Lo stesso concetto si può estendere con x, y e sp. vettoriale

Fatto 1 Al variare di $\lambda \in [0,1]$, le comb. conv. di x e y descrivono tutto il segmento di estremi x e y
(stessa cosa in ogni spazio vettoriale)

Dim Supponiamo wlog $x < y$.

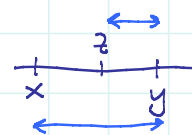
$$\begin{aligned} \text{1° fatto} \quad \lambda x + (1-\lambda)y &\leq \lambda y + (1-\lambda)y = y \\ \lambda x + (1-\lambda)y &\geq \lambda x + (1-\lambda)x = x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{uso che } \lambda \geq 0 \\ \text{e } 1-\lambda \geq 0 \end{array} \right\}$$

2° fatto Se $x \leq z \leq y$, allora esiste $\lambda \in [0,1]$ t.c.

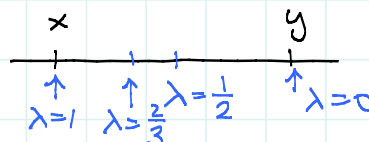
$$z = \lambda x + (1-\lambda)y$$

Basta risolvere $\lambda(x-y) = z-y$, cioè

$$\lambda = \frac{y-z}{y-x}$$



Oss. La comb. convessa, quando λ va da 0 ad 1, percorre il segmento da y verso x



Def. Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se

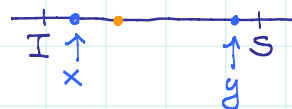
$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

Fatto I convessi $C \subseteq \mathbb{R}$ rientrano in queste categorie

- tutto $\mathbb{R}$
- semirette $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$
- intervalli $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$
- p.ti singoli $\{a\}$
- vuoto

Idea : prendo $I := \inf C$, $S := \sup C$ e dimostro che ogni elemento compreso tra I ed S sta in C .

I ed S possono starci oppure no



Def. (Geometrica) Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso.

Una funzione $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se, per ogni coppia di p.ti del grafico, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico.

Def. (Ufficiale) Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso.

Una funzione $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

↑
 f (comb. convessa)

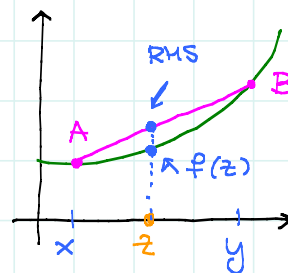
↑
comb. conv. di
 $f(x)$ e $f(y)$ con
lo stesso λ

Def. ... strett. convessa se vale $<$ quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$.

Def. ... concava (o strett. concava)... stessa cosa con $\geq$
(alternativa: dire che $-f$ è convessa)

Oss. Nella def. analitica il LHS è il valore di f nella comb. conv. $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

Dico che RHS = valore in z della retta che congiunge i p.ti A e B



Conto di percorso: retta AB $\bar{y} = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (\bar{x} - x)$

Quando sostituisco $\bar{x} := \lambda x + (1-\lambda)y$, trovo

$$\begin{aligned} \bar{y} &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (\lambda x + (1-\lambda)y - x) \\ &= f(x) + (1-\lambda)(f(y) - f(x)) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

Lemma 1 (Lemma dei 3 rapporti incrementali)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

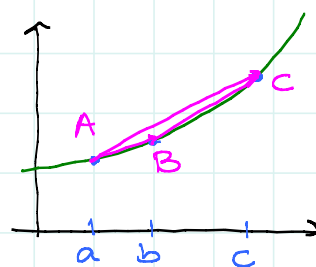
Allora f è convessa se e solo se, per ogni tripla $a < b < c$ in C , vale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Lemma 2 (Lemma dei 2 rapporti)

... f è convessa se e solo se, per ogni tripla $a < b < c$ in C , vale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$



Notazione: se $x < y$ poniamo $r(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$
 $\uparrow$
 rapp. incr. tra x e y

Oss. Il Lemma 1 ci dice che

→ fissato x , la funzione $y \rightarrow r(x, y)$ è deb. cresc.

→ fissato y , " $x \rightarrow r(x, y)$ è deb. cresc.

Dim. Lemma

Convessa $\Rightarrow$ 3 rapporti

Dimostro disug. di dx, e l'altra è uguale

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \Leftrightarrow \quad (basx, ced a a dx)$$

$$f(b) \frac{1}{c-b} \leq f(c) \underbrace{\left(\frac{1}{c-b} - \frac{1}{c-a} \right)}_{\frac{b-a}{(c-b)(c-a)}} + \frac{1}{c-a} f(a)$$

$$\Leftrightarrow f(b) \leq \underbrace{\frac{b-a}{c-a}}_{1-\lambda} f(c) + \underbrace{\frac{c-b}{c-a}}_{\lambda} f(a)$$



Se $b = (1-\lambda)c + \lambda a$, allora è proprio la disug. nella def.

$$(1-\lambda)c + \lambda a = \frac{b-a}{c-a} \cdot c + \frac{c-b}{c-a} \cdot a = \frac{bc - ac + ca - ba}{c-a} = b \quad \square$$

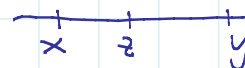
2 rapporti $\Rightarrow$ convessa

Devo dimostrare che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Suppongo wlog $x < y$ e pongo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

Scrivo i 2 rapporti con $x < z < y$



$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad \text{cioè}$$

$$f(z) \left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} \right) \leq \frac{1}{z-x} f(x) + \frac{1}{y-z} f(y)$$

cioè

$$f(z) \frac{y-x}{(z-x)(y-z)} \leq \frac{1}{z-x} f(x) + \frac{1}{y-z} f(y)$$

cioè

$$f(z) \leq \underbrace{\frac{y-z}{y-x}}_{\lambda} f(x) + \underbrace{\frac{z-x}{y-x}}_{1-\lambda} f(y) \quad (\text{basta sostituire})$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 112

Note Title

23/04/2026

PROPRIETÀ FUNZIONI CONVESSE

Teoremino (Convessità vs derivata prima)

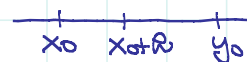
Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso **APERTO** e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

Allora

 f convessa $\Leftrightarrow f'$ debolm. crescente f strett. convessa $\Leftrightarrow f'$ strett. crescente**Dim** $\Rightarrow$ Siano $x_0 < y_0$ due p.ti di C .

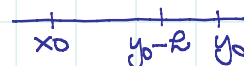
Claim

$$f'(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'(y_0)$$



Per il lemma dei 3 rapporti

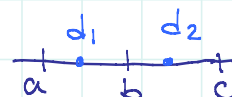
$$r(x_0, x_0 + R) \leq r(x_0, y_0)$$

 $\downarrow$ $f'(x_0)$ quando $R \rightarrow 0^+$ Analogamente $r(x_0, y_0) \leq r(y_0 - R, y_0)$ $\downarrow$ $f'(y_0)$ quando $R \rightarrow 0^+$

$$\text{N.B. } r(y_0 - R, y_0) = \frac{f(y_0) - f(y_0 - R)}{R} = \frac{f(y_0 - R) - f(y_0)}{-R}$$

 $\Leftarrow$ Uso il lemma dei due rapporti. Per dim. che f è convessa basta dim. che

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{f'(d_1)} \stackrel{?}{\leq} \underbrace{\frac{f(c) - f(b)}{c - b}}_{f'(d_2)}$$

Per la monotonia di f' sappiamo che $f'(d_1) \leq f'(d_2) \quad \checkmark \quad \square$

Teorema (Convessità vs derivata seconda)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e **APERTO**, e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte.

Allora

$$\begin{aligned} f \text{ convessa} &\Leftrightarrow f'' \geq 0 \text{ in } C \\ f \text{ strett. conv.} &\Leftarrow f'' > 0 \text{ in } C \end{aligned}$$

Esempio $f(x) = x^4$ è strett. conv. in $\mathbb{R}$, ma $f''(x)$ si annulla per $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Dim} \quad f \text{ convessa} &\Leftrightarrow f' \text{ debolm. crescente} \Leftrightarrow f'' \geq 0 \text{ in } C \\ &\quad \uparrow \text{teo. prec.} \quad \uparrow \text{Monotonia 2} \\ f \text{ strett. conv.} &\Leftrightarrow f' \text{ strett. crescente} \Leftarrow f'' > 0 \text{ in } C \\ &\quad \uparrow \text{teo. prec.} \quad \uparrow \text{Monotonia 2} \end{aligned}$$

Teorema ... $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in C$ e $f''(x) = 0$ sporadicamente (non in un intero intervallo), allora f strett. conv.

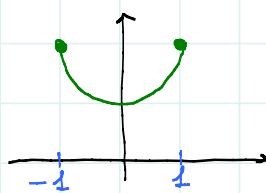
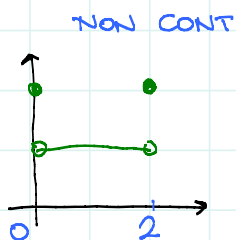
$$\text{Dim} \quad f'' \geq 0 + \text{annull. sporadico} \Rightarrow f' \text{ strett. cresc.} \Leftrightarrow f \text{ strett. conv.}$$

$\uparrow$ Monotonia 3 $\uparrow$ teo. prec.

Oss. Le funzioni convesse NON sono obbligate ad essere derivabili.

Esempio $f(x) = |x|$

Oss. Le funzioni convesse non sono obbligate ad essere continue, e quando lo sono non sono obbligate ad essere Lipschitz



← CONT. MA NON LIP

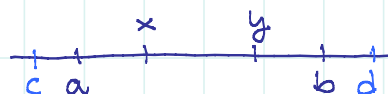
Teorema (Convessità vs continuità)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora

- f è continua in $\text{Int}(C)$
- f è localmente Lipschitz in $\text{Int}(C)$, cioè f è lip. in ogni intervallo $[a, b] \subseteq \text{Int}(C)$
 $\uparrow$ resta lontano dal bordo di C

Dim Basta dimostrare la seconda



Prendiamo $[a, b] \subseteq C$

Scegliamo $c < a$ e $d > b$ tali che $[a, b] \subseteq [c, d] \subseteq C$.

Per ogni scelta di $x < y$ in $[a, b]$ vale che

$$r(x, y) \leq r(x, d) \leq r(b, d)$$

$\uparrow$ Monot. 2^a variabile $\uparrow$ Monot. 1^a variabile

$$r(x, y) \geq r(c, y) \geq r(c, a)$$

da cui

$$r(c, a) \leq r(x, y) \leq r(b, d)$$

e di conseguenza

$$|r(x, y)| \leq \max \{ |r(c, a)|, |r(b, d)| \}$$

Numero L che va bene per ogni $x < y$ in $[a, b]$

Questo ci dice che

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L \quad \forall$$

— o — o —

Le funzioni convesse hanno un po' di derivata?

Def. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \text{Int}(A)$.

Poniamo

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{DERIVATA DESTRA}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{DERIVATA SINISTRA}$$

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora

- (1) $\forall x_0 \in \text{Int}(C)$ esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$
- (2) Quelle di sopra soddisfanno $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$
- (3) $x \rightarrow f'_+(x)$ e $x \rightarrow f'_-(x)$ sono deb. crescenti
- (4) $f'_+(x)$ è continua a destra, cioè $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x)$
 $f'_-(x)$ è continua a sinistra

Dim. (1) Basta osservare $\lambda(x_0, x_0+h)$ è deb. cresc. in h
 $\lambda(x_0-h, x_0)$ idem

(2) Basta osservare che

$$\lambda(x_0-k, x_0) \leq \lambda(x_0-k, x_0+h) \leq \lambda(x_0, x_0+h)$$

Considero la disug. di dx e faccio
 lim per $h \rightarrow 0^+$. Otengo

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \hline x_0-k \quad x_0 \quad x_0+h \end{array}$$

$$\lambda(x_0-k, x_0) \leq f'_+(x_0)$$

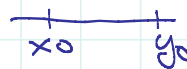
Ora faccio il limite per $k \rightarrow 0^+$ e viene

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$

(3) Devo dimostrare che $f'_+(x_0) \leq f'_+(y_0)$ per ogni $x_0 < y_0$
 Dimostro molto di più, cioè

$$f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0) \leq f'_+(y_0)$$

↑
fatta prima

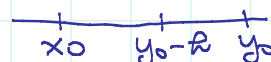


Per quella di dx usiamo che



$$r(x_0, x_0 + h) \leq r(x_0, y_0) \quad \text{e facciamo } h \rightarrow 0^+$$

Per quella di sx usiamo che



$$r(x_0, y_0) \leq r(y_0 - h, y_0) \quad \text{e facciamo } h \rightarrow 0^+.$$

— o — o —

ANALISI 1

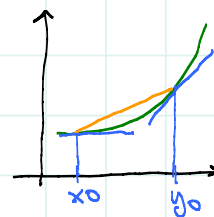
LEZIONE 113

Note Title

27/04/2026

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



→ $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono in ogni $x_0 \in \text{Int}(C)$

→ Se $x_0 < y_0$, allora

$$f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0) \leq f'_+(y_0)$$

→ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x) = f'_+(x_0)$ (f'_+ è continua a dx)

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_-(x) = f'_-(x_0)$ (f'_- è continua a sx)

Dim per f'_+ Facile: $f'_+(x_0) \leq f'_+(x) \quad \forall x \geq x_0$
da cui

$$f'_+(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x)$$

esiste per monotonia

Meno facile

$$\begin{array}{c} x_0 \quad x \quad x_0+h \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$$

Per ogni $x \in (x_0, x_0+h)$ vale

$$f'_+(x) \leq r(x, x_0+h) \quad \text{Passo al limite per } x \rightarrow x_0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x) \leq r(x_0, x_0+h) \quad \text{Passo al limite per } h \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x) \leq f'_+(x_0)$$

→ Se in un certo x_0 accade che $f'_+(x)$ è continua (non solo a dx)
allora $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, cioè in x_0 f è davvero derivabile.

[Enunciato analogo per la sinistra]

Dim Ora per ipotesi $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'_+(x) = f'_+(x_0)$



D'altra parte sappiamo che $f'_+(x) \leq f'_-(x_0)$ per ogni $x < x_0$ e quindi

corretto dopo video

$$f'_-(x_0) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sempre}}}{f'_+(x_0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hp}}}{\lim_{x \rightarrow x_0^-}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disug. di sopra} \\ \text{passata al limite}}}{f'_+(x)} \leq f'_-(x_0)$$

Quindi alla fine coincide tutto.

— o — o —

Lemma (Dei 2/3 rapporti incrementali)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$.

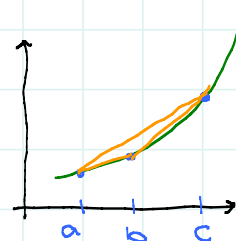
Allora sono fatti equivalenti

(i) f è convessa

(ii) $r(a,b) \leq r(a,c) \quad \forall a < b < c \text{ in } C$

(iii) $r(a,c) \leq r(b,c) \quad "$

(iv) $r(a,b) \leq r(b,c) \quad "$



Dim La stessa della lezione precedente

— o — o —

quasi teorema

Prop Sia $x_0 \in \text{Int}(C)$ un p.to di min. per una funzione convessa

Allora x_0 è p.to di min. $\Leftrightarrow f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$

Dim $\Rightarrow$ Se x_0 è p.to di min., allora $r(x_0, x_0+h) \geq 0$ per $h > 0$ e quindi, facendo $h \rightarrow 0^+$, si ottiene $f'_+(x_0) \geq 0$

Analogamente $r(x_0-h, x_0) \leq 0$ per $h > 0$ e passando al limite viene $f'_-(x_0) \leq 0$

$\Leftarrow$ Se $x > x_0$, allora $r(x_0, x) \geq f'_+(x_0) \geq 0 \rightsquigarrow f(x) \geq f(x_0)$

Se $x < x_0$, allora $r(x, x_0) \leq f'_-(x_0) \leq 0 \rightsquigarrow f(x) \geq f(x_0)$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0$$

DISUGUAGLIANZE DI CONVESSITÀ

- funzione convessa sta sopra la retta tangente
- disuguaglianza di JENSEN

Conv. vs retta tangente

Versione classica: se f è convessa e C^2 , allora

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

↑ ↑
equazione retta tangente



Dim. classica

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f''(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}$$

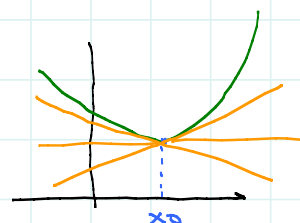
↑
Taylor-Lagrange

Versione minimalista

$f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, $x_0 \in \text{Int}(C)$

Sia $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$. Allora

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x-x_0) \quad \forall x \in C$$



Dim. Se $x > x_0$, allora $r(x_0, x) \geq f'_+(x_0) \geq m$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Basta moltiplicare per $x - x_0$

Se $x < x_0$, allora

$$r(x, x_0) \leq f'_-(x_0) \leq m$$

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq m$$

Anche adesso basta moltiplicare.

— 0 — 0 —

Disug. di JENSEN Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Sia $n \geq 2$ un intero

Siano $x_1, \dots, x_n$ in C

Sia $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ numeri ≥ 0 t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Allora

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

DIM 1 Induzione su n .

Caso base $n=2$: def. di funzione convessa

$n \Rightarrow n+1$ Supponiamo wlog che $\lambda_{n+1} < 1$ e isoliamo l'ultimo

$$\text{LHS}_{n+1} = f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right)}_y\right)$$

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n}_{\hat{\lambda}_1 + \dots + \hat{\lambda}_n = 1}\right)$$

$\uparrow$ uso f convessa

$$\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) \left\{ \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n) \right\}$$

$\uparrow$ uso hp induttiva

$$= \text{RHS}_{n+1}$$

DIM 2 Pongo $x_0 := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ e prendo $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$.

Per ogni k applico la storia della retta tangente

$$f(x_k) \geq f(x_0) + m(x_k - x_0)$$

Moltiplico per λ_k e ottengo

$$\lambda_k f(x_k) \geq \lambda_k f(x_0) + \lambda_k m (x_k - x_0)$$

Adesso sommo per $k = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \geq \sum_{k=1}^n [\lambda_k f(x_0) + \lambda_k m (x_k - x_0)]$$

$$= f(x_0) \underbrace{\sum_{k=1}^m \lambda_k}_1 + m \underbrace{\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k}_{x_0} - m x_0 \underbrace{\sum_{k=1}^m \lambda_k}_1$$

$$= f(x_0), \quad \text{cioè} \quad \text{RHS} \geq \text{LHS}$$

— 0 — 0 —

Caso speciale Se prendo $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \frac{1}{m}$, Jensen diventa

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m)}{m}$$

Provare a dimostrarla per induzione!

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 114

Note Title

27/04/2026

Esempio 1 $f(x) = e^x$ è convessa in tutto $\mathbb{R}$ (derivata seconda)

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$$

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

↑ retta tangente
in $(0,1)$

Esempio 2 $f(x) = x^a$ definita per $x > 0$

$$f'(x) = a x^{a-1}$$

$$f''(x) = a(a-1) x^{a-2}$$

Convessa per $a \geq 1$ (a numero reale)

$$f'(1) = a$$

funzione $\geq$ retta tangente $\leadsto x^a \geq 1 + a(x-1) \quad \forall x > 0$ Se pongo $x-1 = t$, cioè $x = 1+t$ diventa

$$(1+t)^a \geq 1+at \quad \forall t > -1$$

Bernoulli con esponente
reale $a \geq 1$ Disuguaglianza di YOUNG Siano a e b reali positivi.Sia p e q reali > 1 t.c. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Allora

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Caso speciale Se $p=q=2$, diventa $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

$$2ab \leq a^2 + b^2 \leadsto (a-b)^2 \geq 0$$

Dim $f(x) = \log x$ è concava per $x > 0$, quindi

$$\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log x + (1-\lambda) \log y$$



La uso con $\lambda = \frac{1}{p}$, $1-\lambda = \frac{1}{q}$, $x = a^p$, $y = b^q$

$$\begin{aligned} \text{Diventa } \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) &\geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q \\ &= \log a + \log b = \log(ab) \end{aligned}$$

Poiché $\log$ è strett. cresc., lo posso semplificare

YOUNG A 3

$$abc \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q + \frac{1}{r}c^r$$

$$a, b, c > 0 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

Dim. Jensen a 3 per il $\log$

$$\log(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z) \geq \lambda_1 \log x + \lambda_2 \log y + \lambda_3 \log z$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\frac{1}{p} \quad a^p \quad \frac{1}{q} \quad b^q \quad \frac{1}{r} \quad c^r$

Allo stesso modo si generalizza ad n termini

CAUCHY-SCHWARZ

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq [a_1^2 + \dots + a_n^2]^{\frac{1}{2}} [b_1^2 + \dots + b_n^2]^{\frac{1}{2}}$$

Dim. classica Pongo $A = (a_1, \dots, a_n)$
 $B = (b_1, \dots, b_n)$

Scrivo

$$0 \leq \|A + tB\|^2 = \|A\|^2 + 2t\langle A, B \rangle + t^2\|B\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi discriminante ≤ 0 , cioè

$$\langle A, B \rangle^2 - \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 \leq 0, \quad \text{cioè} \quad |\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Disug. di Hölder (a 2 specie)

$$a_1 b_1 + \dots + a_m b_m \leq [a_1^p + \dots + a_m^p]^{\frac{1}{p}} [b_1^q + \dots + b_m^q]^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a_i e b_i reali positivi o nulli

Dim Se $a_1^p + \dots + a_m^p = 0$ non è difficile ☺
 Se $b_1^q + \dots + b_m^q = 0$ " ☺

Ora WLOG posso supporre che $a_1^p + \dots + a_m^p = b_1^q + \dots + b_m^q = 1$.
 Perché? Perché la disuguaglianza è OMOGENEA, cioè se moltiplico gli a_i per un certo λ ed i b_i per un certo μ , allora posso raccogliere $\lambda\mu$ al LHS e RHS e semplificarli.

Quindi ci siamo ridotti a dimostrare che

$$a_1 b_1 + \dots + a_m b_m \leq 1 \quad \text{quando} \quad a_1^p + \dots + a_m^p = b_1^q + \dots + b_m^q = 1.$$

Ora su ogni prodotto uso la disug. di YOUNG

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q, \quad \text{da cui}$$

$$\text{LHS} = \sum a_i b_i \leq \frac{1}{p} \sum a_i^p + \frac{1}{q} \sum b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{☺}$$

Allo stesso modo si dimostra il caso con 3 o più "specie"

$$\sum a_i b_i c_i \leq \left(\sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum c_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\text{se} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

DISUG. TRA LE MEDIESetting : $a_1, \dots, a_n$ reali positiviMedia geometrica: $[a_1 \cdot \dots \cdot a_n]^{\frac{1}{n}}$ (GM)Media aritmetica $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ (AM)Media p -esima : $\left[\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right]^{\frac{1}{p}}$
Definita per ogni $p \in \mathbb{R}$
se per $p=0$ si interpreta
come GM**Proprietà fondamentale** $p \rightarrow M_p(a_1, \dots, a_n)$ è crescente.

Inoltre

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = \max\{a_1, \dots, a_n\} \quad \lim_{p \rightarrow -\infty} M_p = \min\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} M_p = \text{GM}$$

$$\boxed{\text{GM} \leq \text{AM}} \quad \text{cioè} \quad [a_1 \cdot \dots \cdot a_n]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Faccio $\log$ a dx e sx e diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log(a_1 \cdot \dots \cdot a_n) &\leq \log\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \\ &= \frac{\log a_1 + \dots + \log a_n}{n} \quad \leadsto \text{ Jensen del logaritmo} \end{aligned}$$

Ancora più generale $a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$
purché $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$$\boxed{\text{AM} \leq M_p \text{ per } p \geq 1} \quad \text{cioè} \quad \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \left[\frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n} \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{cioè} \quad \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^p \leq \frac{a_1^p + \dots + a_n^p}{n}$$

Jensen per la funzione $f(x) = x^p$ che è convessa per $p \geq 1$

Oss. Bastano questi due casi per coprire la monotonia di $p \rightarrow M_p$ per p generico

(se voglio dim. che $M_3 \leq M_2$ basta porre $a_i^3 = b_i$ e mi riduco a $M_1 \leq M_2$)

Esercizio Il prodotto di due convessi è convesso?

$$f(x) = x \quad g(x) = x^2 \quad f(x) \cdot g(x) = x^3 \quad \ddot{}$$

[Brutal mode: $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

... se fosse $g \geq 0$, $f \geq 0$, f e g monotone dalla stessa parte...]

→ dimostrarlo senza usare le derivate

→ trovare controesempi quando manca qualche ipotesi

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 115

Note Title

29/04/2026

Avanzi sulle funzioni convesseProp (Max/min di funzioni convesse)Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora max esiste per forza. Inoltre

→ se esiste un p.to di min $x_0 \in (a, b)$, allora

$$f'_-(x_0) \leq 0 \leq f'_+(x_0)$$

→ almeno uno degli estremi è p.to di max

Dim Max per forza agli estremi

- Se $f(a) = f(b) = c$, allora per convessità $f(x) \leq c$ per ogni $x \in [a, b]$, quindi a e b sono p.ti di max
- Se $f(a) \neq f(b)$, allora il più grande dei due è il max, ed è l'unico. [Vedi figura]



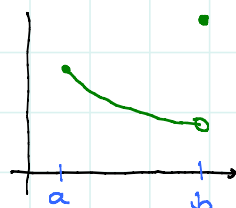
Per l'esistenza del minimo non posso usare la continuità, perché vale solo in (a, b) . In realtà però f è SCS in tutto $[a, b]$.

Sofatti $f(x) \leq r(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, dove $r(x)$ è la retta che congiunge i valori agli estremi, quindi

$$\limsup_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow a^+} r(x) = f(a)$$

e stessa cosa in b^- .

Esempio min $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ potrebbe non esistere



LEMMA DELLA SOTTO-SOTTO

Sia $\{x_n\}$ una succ. di numeri reali.

Supponiamo che esista $l \in \overline{\mathbb{R}}$ con questa proprietà:

per ogni sotto-succ x_{n_k} , esiste una sotto-sotto-succ $x_{n_{k_i}}$ t.c.

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow l \quad (l \text{ è sempre lo stesso})$$

Allora

$$x_n \rightarrow l \quad (\text{stesso})$$

Dim. Ci sarebbero 3 casi. Facciamo quello con $l \in \mathbb{R}$ (i casi $\pm\infty$ per esercizio).

Devo dimostrare che

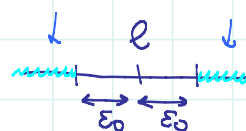
$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq m_0 |x_n - l| \leq \varepsilon$$

Se per assurdo non fosse vero, allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall m_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq m_0 |x_n - l| > \varepsilon_0$$

cioè a_n è frequentemente lontana da l

qui frequentemente,



Quindi esiste una sotto-succ. x_{n_k} t.c. $|x_{n_k} - l| > \varepsilon_0$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ (basta prendere un primo elemento x_{m_0} e poi, dopo aver scelto $x_{m_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ giocare l'ipotesi di assurdo con m_{k+1})

Questa sotto-succ. x_{n_k} non può avere sotto-sotto che tendono ad l

— o — o —

FUNZIONI INVERSE

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Sia $f: A \rightarrow B$

iniettiva e surgettiva. Allora esiste $g: B \rightarrow A$

tale che

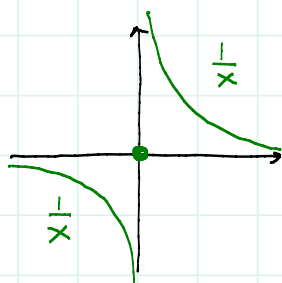
$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

- Domande**
- Q1** Se f è monotona, g è monotona?
 - Q2** Se f è continua, g è continua?
 - Q3** Se f è derivabile in $x_0 \in \text{Int}(X)$, posso dire che g è derivabile in $f(x_0)$?
 - Q4** Se f è C^1 , g è C^1 ?
 - Q5** Se f è C^{2026} , g è C^{2026} ?

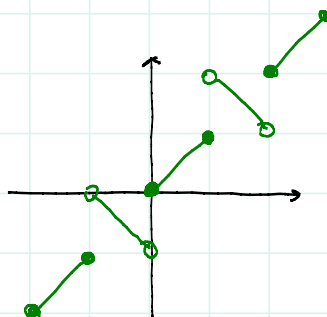
Esempio 1 Invertibile implica monotona?

No! Nemmeno per $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$



Q1 Risposta: **Sì**

Dim Facciamo il caso f debolm. crescente.

In realtà è pure strett. cresc. (se fosse $f(a_1) = f(a_2)$ con $a_1 < a_2$ mancherebbe l'iniettività)

Claim: anche g è strett. cresc.

Se per assurdo non lo fosse, avremmo

$$b_1 < b_2 \quad \text{con} \quad g(b_1) > g(b_2) \quad (= \text{è impossibile})$$

Se applico f ottengo

$$\underset{b_1}{f(g(b_1))} > \underset{b_2}{f(g(b_2))} \quad (f \text{ è strett. cresc.})$$

e questo non va bene.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 116

Note Title

29/04/2026

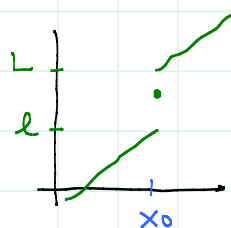
LEMMA 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ CONVESSO (= connesso in $\mathbb{R}$)Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ debolmente monotona.

Allora

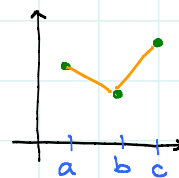
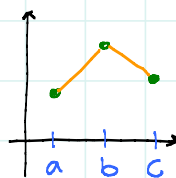
 f è continua $\Leftrightarrow f(A)$ è convesso**Dim.** $\Rightarrow$ teorema dei valori intermedi $\Leftarrow$ Facciamo wlog il caso f debolmente crescente.Supponiamo f non continua in un certo $x_0 \in \text{Int}(A)$ (bisognerebbe poi fare il caso in cui $x_0 \in \partial A$, ma è uguale). Allora

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 esistono per monotonia

Ma allora l'immagine $f(A)$ non può contenere più di un pto in $[l, L]$, e quindi $f(A)$ non è convesso.Lemma 2 (Lemma del triangolino)Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione NON monotona.Allora esistono $a < b < c$ in D per cui vale una delle seguenti

- $f(b) > f(a)$ e $f(b) > f(c)$
- $f(b) < f(a)$ e $f(b) < f(c)$

**Dim.** Non lo so fare
(rapida)

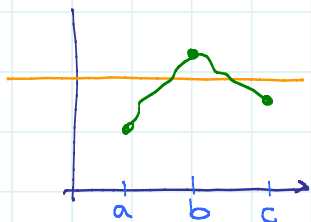
— o — o —

Lemma 3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile.

Allora f è strett. monotona.

Dim. Se non fosse deb. monotona, saremmo in uno scenario del lemma del triangolino. Prendiamo wlog il primo



Scego λ tale che

$$\lambda < f(b) \quad \lambda > f(a) \quad \lambda > f(c)$$

e trovo una violazione di iniettività

Una volta che è deb. monotona lo è pure strett.

— o — o —

Dim. teo. 2 A convesso, $f: A \rightarrow B$ continua e invertibile

- Per il lemma 3 è strett. monotona e $B = f(A)$ è convesso
- Per Q1 $g: B \rightarrow A$ è strett. monotona e B è convesso
- Per il lemma 1 g è continua $\Leftrightarrow g(B)$ è convesso

Ma $g(B) = A$ $\ddot{}$

— o — o —

Oss. Tutte le inverse classiche ricadono nel teo 1 e/o teo. 2

— o — o —

Q3 NO $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$ derivabile in $x=0$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$ non derivabile in $x=0$

Teorema Sia $f: A \rightarrow B$ invertibile

Sia $g: B \rightarrow A$ l'inversa

Sia $x_0 \in \text{Int}(A)$ e sia $y_0 = f(x_0)$

Supponiamo che $f'(x_0)$ esista e $f'(x_0) \neq 0$.

Allora

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

NON DIM $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
 $\stackrel{[x]'}{1} \rightsquigarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \rightsquigarrow x = x_0$

DIM Devo fare

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \quad \begin{matrix} x_0 \\ \parallel \\ y_0 \end{matrix} \nearrow f(x_0)$$

Pongo $y = f(x)$, cioè $x = g(y)$. Quando $y \rightarrow y_0$ ho che $x \rightarrow x_0$ (qui sto usando la continuità dell'inversa)

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Q4 Prop. Se $f: A \rightarrow B$ è C^1 e invertibile e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora g è C^1 in B e

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \forall x \in B$$

Dim Conseguenza della **Q3**

Q5 Prop. Se $f: A \rightarrow B$ è C^k e invertibile e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora g è C^k

[Morale: l'unico ostacolo è sulla derivata prima]

DIM **BOOTSTRAP** $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

$$f \in C^1 \Rightarrow g \in C^1. \text{ Se } f \in C^2 \Rightarrow f' \in C^1 \Rightarrow \frac{1}{f'(g(x))} \in C^1$$

$$\Rightarrow g' \in C^1 \Rightarrow g \in C^2$$

$$\text{Se } f \in C^3 \rightsquigarrow f' \in C^2 \rightsquigarrow \frac{1}{f'(g(x))} \in C^2 \rightsquigarrow g' \in C^2 \rightsquigarrow g \in C^3$$

e così via.

— o — o —

Esempio Sia u la soluzione del pb. di Cauchy

$$u'(t) = \arctan(u(t)) \quad u(0) = 2026$$

Dico che $u \in C^\infty$

Dim. $u \in C^1$ per il teo. di esistenza

$$\rightsquigarrow \arctan u \in C^1 \rightsquigarrow u' \in C^1 \rightsquigarrow u \in C^2$$

$$\rightsquigarrow \arctan u \in C^2 \rightsquigarrow u' \in C^2 \rightsquigarrow u \in C^3$$

e così via.

— o — o —

Derivata della funzione composta

$$\text{NON DIM} \quad \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

$$\downarrow y = f(x)$$

$$\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

$$\downarrow g'(f(x_0))$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\downarrow f'(x_0)$$

Problema: ma sto molt/div. per 0?

Dim. Prendo una succ. $x_n \rightarrow x_0$. Ci sono due casi

- esiste una sottosucc. $x_{n_k} \rightarrow x_0$ su cui $f(x_{n_k}) \neq f(x_0)$

Su quella il conto brutale funziona

- esiste una sottosucc. $x_{n_k} \rightarrow x_0$ su cui $f(x_{n_k}) = f(x_0)$ sempre

allora $f'(x_0) = 0$, quindi in particolare $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0$.
Ma su quella successione anche

$$\frac{g(f(x_{n_k})) - g(f(x_0))}{x_{n_k} - x_0} \rightarrow 0 \quad (\text{Num} \equiv 0)$$

e quindi tende comunque a $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.
— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 117

Note Title

30/04/2026

Teo 1 (Formula di STIRLING)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

il rapporto $\rightarrow 1$

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

rapporto $\rightarrow 1^+$

Teo 2 (Prodotto di WALLIS)

$$W_n := \prod_{k=1}^n \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$W_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Teo 3 (Integrale Gaussiano)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Dim. teo 1 Pongo $S_n := \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \frac{1}{n!}$

La tesi equivale a $S_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e $S_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Step 1 $S_n \rightarrow S_\infty \in (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Pongo } R_n &:= \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \sqrt{n+1} \frac{1}{(n+1)n!} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ora osservo che $S_n = S_1 \cdot R_1 \cdot \dots \cdot R_{n-1}$ (prodotto telescopico)

$$= S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} R_k$$

Conseguenza: $S_n \rightarrow S_\infty \in (0, +\infty)$ se e solo se

$$\prod_{k=1}^{\infty} R_k \text{ converge ad un numero } \in (0, +\infty)$$

Questa converge se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} \log R_k$ converge

$$\text{Ora } \log R_m = \log \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) - 1$$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} + o\left(\frac{1}{m^3}\right)\right) - 1$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2m}} + \frac{1}{3m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) + \cancel{\frac{1}{2m}} - \frac{1}{4m^2} - \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{12m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Quindi la serie converge per C.A. con $\frac{1}{m^2}$

STEP 2 Per dimostrare che $S_n \leq S_\infty$ basta dire che S_n è cresc., cioè $R_m > 1$ per ogni m , cioè $\log R_m > 0$ per ogni m , cioè

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) - 1 > 0 \quad \text{per ogni } m$$

Dal Taylor $\log R_m \sim \frac{1}{12m^2}$ sappiamo che è > 0 per m grande, ma noi lo vorremmo per ogni m .

Prima idea: se come funzione di m fosse decrescente...

[Probabilmente funziona: provare a calcolare la derivata]

Seconda idea: considero $g(x) = \log x$, funzione concava

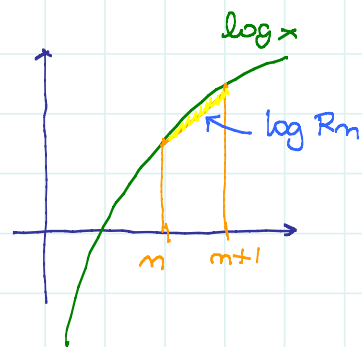
$$\int_m^{m+1} \log x \, dx \geq \text{Area trapezio}$$

$$\frac{1}{2} (\log m + \log(m+1))$$

$$[x \log x - x]_m^{m+1}$$

$$(m+1) \log(m+1) - (m+1) - m \log m + m$$

$$= (m+1) \log(m+1) - m \log m - 1$$



Mettenendo insieme: $(m+1) \log(m+1) - m \log m - 1 \geq \frac{1}{2} \log m + \frac{1}{2} \log(m+1)$
cioè

$$(m + \frac{1}{2}) \log(m+1) - (m + \frac{1}{2}) \log m - 1 \geq 0$$

$$\underbrace{(m + \frac{1}{2}) \log(\frac{m+1}{m}) - 1}_{\log R_m} \geq 0$$

STEP 3 Formula per W_m

$$W_m = \prod_{k=1}^m \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1) \cdot (2m+1)} \cdot \frac{\text{Num}}{\text{Denom}}$$

$$= \frac{[2^m \cdot m!]^4}{(2m+1) [(2m)!]^2}$$

Formula: $W_m = \frac{[2^m \cdot m!]^4}{(2m+1) [(2m)!]^2}$

Formalmente si dimostra per induzione.

STEP 4 Nella formula sostituisco $m! = \frac{n^m}{e^m} \sqrt{m} \frac{1}{S_m}$

e analogamente $(2m)! = \frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2m} \frac{1}{S_{2m}}$

Ottengo

$$W_m = \frac{2^{4m} \cdot m^{4m}}{e^{4m}} \cdot m^2 \cdot \frac{1}{S_m^4} \cdot \frac{1}{(2m+1)} \cdot \frac{e^{4m} S_{2m}^2}{(2m)^{4m} \cdot 2m}$$

$$W_m = \frac{m^2}{2m(2m+1)} \cdot \frac{S_{2m}^2}{S_m^4}$$

$$\downarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{teo 2})$$

$$\downarrow \frac{1}{4}$$

$$\downarrow \frac{1}{S_\infty^2}$$

Quindi $\frac{1}{S_\infty^2} = 2\pi$, cioè $S_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\ddot{\smile}$

— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare che $W_m \rightarrow W_\infty \in (1, +\infty)$
 è prodotto di roba ≥ 1

$$W_m = \prod_{k=1}^m \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} \quad \text{converge se e solo se}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right) \text{ converge, cioè } - \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right) \text{ converge}$$

$$\text{Adesso } \log\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \sim -\frac{1}{4k^2}$$

e quindi la serie converge per confronto asintotico

— 0 — 0 —

Esercizio Pongo

$$I_m := \int_0^{\pi} \sin^m x \, dx$$

$$\text{Ossevo che } I_0 = \int_0^{\pi} 1 \, dx = \pi \quad \text{e} \quad I_1 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^\pi \sin^n x \, dx = \int_0^\pi \underbrace{\sin x}_F \cdot \underbrace{\sin^{n-1} x}_G \, dx \\
 &= \underbrace{[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x]_0^\pi}_F - \int_0^\pi \underbrace{(-\cos x)}_F \underbrace{(n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x}_G \, dx \\
 &\quad \text{per colpa di } \sin x \\
 &= (n-1) \int_0^\pi \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^\pi \sin^n x \, dx
 \end{aligned}$$

Grande ritorno! Abbiamo ottenuto

$$n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

Formula ricorsiva

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 118

Note Title

30/04/2026

Dim. Teo. 2 $W_m := \prod_{k=1}^m \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$

$$I_m := \int_0^{\pi} \sin^m x \, dx \qquad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

Step 1 Relazione tra I_m e W_m

Pongo $\hat{R}_m := \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}}$. Osservo che $\hat{R}_0 = \frac{I_1}{I_0} = \frac{2}{\pi}$

Uso che $I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1}$ e $I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2}$

quindi

$$\begin{aligned} \hat{R}_m &= \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1} \frac{2m}{2m-1} \frac{1}{I_{2m-2}} \\ &= \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \hat{R}_{m-1} \end{aligned}$$

Da questa segue che

$$\begin{aligned} \hat{R}_m &= \frac{2m \cdot 2m}{(\cdot)(\cdot)} \cdot \hat{R}_{m-1} = \frac{2m \cdot 2m}{(\cdot)(\cdot)} \frac{(2m-2)(2m-2)}{(\cdot)(\cdot)} \hat{R}_{m-2} \\ &= \dots = W_m \cdot \hat{R}_0 = W_m \cdot \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\hat{R}_m = W_m \cdot \frac{2}{\pi}$$

fare l'osservazione

Quindi teo 2 $\Leftrightarrow \hat{R}_m \rightarrow 1$

Step 2 $\hat{R}_m = \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \rightarrow 1$

Si fa con i carabinieri

$$\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \leq 1 \quad \text{ovvio perché}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^\pi (\sin x)^{2m+1} dx \leq \int_0^\pi (\sin x)^{2m} dx \leq I_{2m}$$

cioè I_m è debolmente decrescente.

Per il bound dal basso

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m}, \text{ quindi}$$

$$\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} = \frac{2m}{2m+1} \boxed{\frac{I_{2m-1}}{I_{2m}}} \geq \frac{2m}{2m+1}$$

Num $\geq$ Den.

In conclusione $\frac{2m}{2m+1} \leq \hat{R}_m \leq 1$ e si conclude

— 0 — 0 —

Lemma (Asintotica di I_m)

$$I_m \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}}, \text{ cioè } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{m} I_m = \sqrt{2\pi}$$

Dim Basta farlo separato sui pari e sui dispari, cioè

$$\sqrt{2m} I_{2m} \rightarrow \sqrt{2\pi}$$

$$\sqrt{2m+1} I_{2m+1} \rightarrow \sqrt{2\pi}$$

Facciamo sui pari. Bisogna trovare formule per I_{2m} .

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} = \dots = I_0 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2m} \cdot \frac{\text{Den}}{\text{Den}} \\ &= \pi \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \end{aligned}$$

Dimostro per induzione che
$$I_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \cdot \pi$$

Ora moltiplico per $\sqrt{2m}$ e sostituisco

$$m! = \frac{m^m}{e^m} \sqrt{m} \frac{1}{S_m}$$

$$(2m)! = \frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2m} \frac{1}{S_{2m}}$$

Otengo

$$\begin{aligned} \sqrt{2m} I_{2m} &= \sqrt{2m} \frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2m} \frac{1}{S_{2m}} \frac{1}{e^{2m}} \cdot \frac{e^{2m} S_m^2}{m^{2m} \cdot m} \cdot \pi \\ &= 2\pi \frac{S_m^2}{S_{2m}} \end{aligned}$$

da cui $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{2m} I_{2m} = 2\pi S_\infty = 2\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$

Per il caso di dispari si può o rifare il conto, o più semplicemente osservare che

$$\sqrt{2m+1} I_{2m+1} = \boxed{\sqrt{2m+1}} \cdot \boxed{\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}}} \cdot \boxed{I_{2m} \cdot \sqrt{2m}} \cdot \boxed{\frac{1}{\sqrt{2m}}} \rightarrow \sqrt{2\pi}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\hat{R}_m \rightarrow 1$ $\sqrt{2\pi}$
 — 0 — 0 —

Dim. Teo. 3 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Step 1 $1-x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \quad \text{per ogni } x \geq 0$

A sx è la solita $e^t \geq 1+t$. A dx è $(1+x)e^{-x} \leq 1$ per $x \geq 0$ e questo si fa con un facile studio di funzioni

Step 2 Uso step 1 con $x=t^2 \geq 0$. Otengo

$$1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Elevo alla n e ottengo

$$(1-t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

Corretto dopo video: vale solo per $t \in [-1,1]$,
 $\uparrow$ ma ci basta 😊

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Integro tra -1 e 1

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \underset{\text{LHS}}{\leq} \int_{-1}^1 e^{-nt^2} dt \underset{\text{CHS}}{\leq} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \underset{\text{RHS}}{}$$

Osservo che $\text{CHS} = \int_{-1}^1 e^{-nt^2} dt = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{n}} dx$
 $\uparrow$
 $\sqrt{nt} = x$

Quindi

$$\text{CHS} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

$\downarrow$ integrale Gaussiano

$$\text{LHS} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \underset{t=\cos x}{=} \int_{\pi}^0 (1-\cos^2 x)^n (-\sin x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x)^{2n+1} dx = I_{2n+1}$$

Manca

$$\text{RHS} = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

Losco: pongo $t = \frac{1}{\tan x}$
 gli estremi vengono $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
 e in mezzo ci sta 0 😊

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\pi}{2} - \arctan \varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^{2n} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

Pongo davvero $t = \frac{1}{\tan x}$

$$1 \approx \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\tan x} \approx \tan x = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\approx x = \arctan \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} - \arctan \varepsilon$$

ANALISI 1 - LEZIONE 119

Note Title

04/05/2026

PROPRIETÀ DI RIORDINAMENTO PER SERIE

Proprietà commutativa della somma: se in una somma FINITA cambio l'ordine degli addendi, il risultato non cambia.

[Nel caso di due addendi è un assioma, poi si procede per induzione]

Domanda: si salva qualcosa nel caso delle serie?

In generale NO, ma SI se la serie converge ASSOLUTAMENTE.

Teorema del no Sia $\sum a_n$ una serie che converge, ma non assolutamente.

Allora riordinando i termini le possiamo far assumere un comportamento a scelta

Idea della diu

1ª osservazione: se sommo solo i termini positivi diverge a $+\infty$
 " " " negativi " $-\infty$

(se non fosse così la serie originale conv. assol. oppure divergerebbe a $\pm\infty$).

2ª osservazione: posso ottenere somma 2026 con questo algoritmo

→ all'inizio sommo termini pos. fino a superare 2026 (e prima o poi succede per la 1ª oss.)

→ poi inizio ad usare i neg. fino a quando scendo sotto 2026,

→ poi riprendo con i pos., e così via.

Così uso tutti i termini e convergo a 2026 perché gli sforamenti in alto o in basso sono $\leq$ dell'ultimo termine usato e $a_n \rightarrow 0$.

Teorema del SI Sia $\sum a_n$ una serie assolutamente convergente.
 Sia $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una permutazione (funzione iniettiva e sng.)
 Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

↑
serie con i
termini riordinati

Dim Sia S_n le somme parziali del RHS e sia $S_n \rightarrow S_{\infty}$
 Devo dimostrare che, per n abbastanza grande, ↑
RHS

$$\left| \underbrace{\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}}_{\text{somma parziale del LHS}} - S_{\infty} \right| \leq \varepsilon$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Poiché $\sum a_n$ converge, $\exists H_{\varepsilon}$ t.c. $|S_n - S_{\infty}| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall n \geq H_{\varepsilon}$
- Poiché $\sum |a_n|$ converge, $\exists k_{\varepsilon}$ t.c. $\underbrace{\sum_{k \geq k_{\varepsilon}} |a_k|}_{\text{coda di } \sum |a_n|} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$
- Pongo $L_{\varepsilon} := \max \{H_{\varepsilon}, k_{\varepsilon}\}$. Poiché $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è surgettiva
 $\exists M_{\varepsilon}$ t.c. $\sigma(\{1^0, \dots, n\}) \supseteq \{1^0, \dots, L_{\varepsilon}\} \quad \forall n \geq M_{\varepsilon}$
- Claim: $\left| \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq M_{\varepsilon}$

Dimostriamo il claim. Poniamo

$$U_n := \{k \in \{1^0, \dots, n\} \text{ t.c. } \sigma(k) \in \{1^0, \dots, L_{\varepsilon}\}\}$$

↑
utili

$$I_n := \{k \in \{1^0, \dots, n\} \text{ t.c. } \sigma(k) \geq L_{\varepsilon} + 1\}$$

↑
inutili

Ora scriviamo

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^m a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| &= \left| \sum_{k \in U_m} a_{\sigma(k)} + \sum_{k \in I_m} a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k \in U_m} a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| + \sum_{k \in I_m} |a_{\sigma(k)}| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{L_{\varepsilon}} a_k - S_{\infty} \right| + \sum_{k \in I_m} |a_{\sigma(k)}| \\
&\quad \uparrow \text{uso propr. comm. in una somma FINITA} \quad \uparrow \text{tutti } \geq L_{\varepsilon} + 1 \\
&\leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{L_{\varepsilon}} a_k - S_{\infty} \right|}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon \text{ perché } L_{\varepsilon} \geq H_{\varepsilon}} + \underbrace{\sum_{k=L_{\varepsilon}+1}^{\infty} |a_k|}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon \text{ perché } L_{\varepsilon} \geq K_{\varepsilon}} \\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \ddot{\smile} \\
&\quad \text{--- o --- o ---}
\end{aligned}$$

PROPRIETÀ DI RAGGRUPPAMENTO

Oss. Dalle proprietà di riordinamento segue che posso definire la somma di un qualunque sottoinsieme NUMERABILE di numeri reali.

Cioè dato $A \subseteq \mathbb{R}$ con A numerabile (cioè esiste $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ iniettiva e surgettiva), allora posso definire

$$\sum_{a \in A} a \quad \text{purché} \quad \sum_{a \in A} |a| \text{ converga}$$

Idea: A lo posso pensare come immagine di una succ $\{a_n\}$ iniettiva e pone

$$\sum_{a \in A} a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ma se cambio a_n , cambierà la somma?
No, se converge assolutamente!

RaggruppamentoSia $\{a_n\}$ una successione.Siano $A_i \subseteq \mathbb{N}$ una partizione di $\mathbb{N}$

$$\rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

$$\rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n \in A_i} a_n \right)$$

vale purché $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converga!

[Analogo della proprietà associativa per le somme finite]

Dim (La stessa di prima!) Pongo di nuovo $L_\varepsilon := \max \{M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$ Allora esiste M_ε tale che

$$A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_m \supseteq \{0, 1, \dots, L_\varepsilon\} \quad \forall m \geq M_\varepsilon$$

A questo punto

$$\sum_{i=0}^m \left(\sum_{k \in A_i} a_k \right) \text{ contiene due tipi di addendi:}$$

$$\rightarrow \text{tutti } a_k \text{ con } k = \{0, 1, \dots, L_\varepsilon\}$$

$$\rightarrow \text{altri } a_k \text{ con } k \geq L_\varepsilon + 1$$

I secondi danno un contributo $\leq \frac{1}{2}\varepsilon$ I primi danno un contributo che dista da $S_\infty \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 120

Note Title

04/05/2026

Prodotto di Serie Siano $\sum a_n$ e $\sum b_m$ due serie.

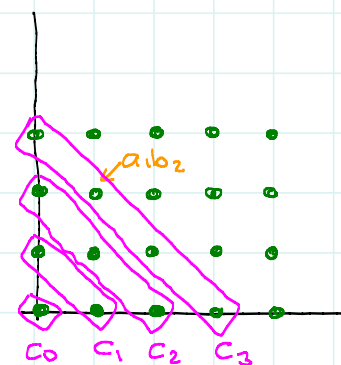
Domanda: posso moltiplicarle? Come?

Euristica $\sum a_n \cdot \sum b_m = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots)$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{c_1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{c_2} + \dots$$

Verebbe da porre $c_m := \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ e dire che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$



Domanda: se $\sum a_n = A$ e $\sum b_m = B$,
possiamo concludere che
 $\sum c_m = AB$

Esempio del No $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ $b_m = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m+1}}$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_m$ convergono per Leibniz.

La serie del prodotto non converge perché non verifica nemmeno la cond. neces.

$$c_m := \sum_{k=0}^m \underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}_{a_k} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^{m-k}}{\sqrt{m-k+1}}}_{b_{m-k}} = (-1)^m \sum_{k=0}^m \frac{1}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{m-k+1}}$$

solo $m+1$ termini tutti $\geq \frac{1}{\sqrt{m+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m+1}}$

Teorema del S1 Supponiamo che $\sum a_n$ conv. ASSOLUTAMENTE
e $\sum b_n$ converga (e assol. meglio!)

Allora $\sum c_n$ converge assolutamente e converge a $A \cdot B$

Dim Parte easy: $\sum |c_n|$ converge

Oss. base

$$\sum_{k=0}^m c_k = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \quad [\text{La somma del triangolo riorganizzato per colonne verticali}]$$

dove ho posto $b_m = \sum_{k=0}^m b_k \rightarrow B$

$$a_m = \sum_{k=0}^m a_k \rightarrow A$$

Ora $\sum_{k=0}^m |c_k| \leq \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot \underbrace{|b_{m-k}|}_{\text{limitati essendo succ. convergente}} \leq \hat{B} \underbrace{\sum_{k=0}^m |a_k|}_{\text{limitata per assoluta convergenza}}$

Ho posto $\hat{B} := \sup \{ |b_m| : m \in \mathbb{N} \}$ [finito perché $b_m \rightarrow B \in \mathbb{R}$]

Parte più delicata: la somma è proprio $A \cdot B$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\left| \sum_{k=0}^m c_k - A \cdot B \right| \leq \varepsilon \quad \text{se } m \text{ è abbastanza grande}$$

Poniamo $\hat{A} := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ [finito per assoluta convergenza]

- Ci viene dato $\varepsilon > 0$.
- Poiché $\sum a_n$ converge
 $\exists H_\varepsilon$ t.c. $|A_m - A_\infty| \leq \frac{1}{\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq H_\varepsilon$

Basterebbe $\frac{1}{3\varepsilon}$
 $\downarrow$
- Poiché $\sum |a_n|$ converge
 $\exists K_\varepsilon$ t.c. $\sum_{k > K_\varepsilon} |a_k| \leq \frac{1}{2\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon$
- Poiché $\sum b_n$ converge
 $\exists L_\varepsilon$ t.c. $|B_m - B_\infty| \leq \frac{1}{\hat{A}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq L_\varepsilon$
- Dico che n abbastanza grande basta $n \geq \max\{K_\varepsilon + L_\varepsilon, H_\varepsilon\}$.

$\uparrow$
 indici messi a posto dopo video

Vediamo perché basta.

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=0}^m c_k - A_\infty B_\infty \right| &= \left| \sum_{k=0}^m a_k B_{m-k} - A_\infty B_\infty \right| \\
 &\leq \left| \sum_{k=0}^m a_k B_{m-k} - \sum_{k=0}^m a_k B_\infty \right| + \left| \sum_{k=0}^m a_k B_\infty - A_\infty B_\infty \right| \\
 &= \left| \sum_{k=0}^m a_k (B_{m-k} - B_\infty) \right| + \left| B_\infty \left(\sum_{k=0}^m a_k - A_\infty \right) \right| \\
 &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} a_k (B_{m-k} - B_\infty) \right|}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\left| \sum_{k=K_\varepsilon+1}^m a_k (B_{m-k} - B_\infty) \right|}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\left| B_\infty \left(\sum_{k=0}^m a_k - A_\infty \right) \right|}_{\textcircled{3}}
 \end{aligned}$$

Dico che tutti e 3 sono $\leq \frac{1}{4} \varepsilon$ e questo basta

$$\textcircled{3} \leq \underbrace{|B_\infty|}_{\leq \hat{B}} \cdot \underbrace{|A_m - A_\infty|}_{\frac{1}{\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon} \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$\uparrow$ il +1 tutela dal caso $\hat{B} = 0$
 (vero perché $m \geq H_\varepsilon$)

Consideriamo ②. Osserviamo che $|B_i - B_\infty| \leq |B_i| + |B_\infty| \leq 2\hat{B}$
e quindi

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\leq \sum_{k=K_\varepsilon+1}^m |a_k| \cdot \underbrace{|B_{m-k} - B_\infty|}_{\leq 2\hat{B} \text{ (vero sempre)}} \leq 2\hat{B} \cdot \sum_{k=K_\varepsilon+1}^m |a_k| \\ &\leq \frac{1}{2\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4\varepsilon} \text{ (vero per def'n. di } K_\varepsilon) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\leq \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} |a_k| \cdot \underbrace{|B_{m-k} - B_\infty|}_{\leq \frac{1}{\hat{A}+1} \cdot \frac{1}{4}\varepsilon \text{ (vero se } m-k \geq L_\varepsilon)} \leq \frac{1}{\hat{A}+1} \cdot \frac{1}{4}\varepsilon \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\hat{A}} \leq \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

Perché $m-k \geq L_\varepsilon$? Perché $m \geq K_\varepsilon + L_\varepsilon$ e $k \leq K_\varepsilon$.
— 0 — 0 —

Applicazione standard

Visto a suo tempo

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{a_k} \quad [\text{Taylor}]$$

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^k}{k!}}_{b_k} \quad [\text{Anti-Taylor}]$$

Allora

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} x^k \frac{1}{(m-k)!} y^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} \frac{m!}{k!(m-k)!} x^k y^{m-k} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k y^{m-k} \\ &= \frac{1}{m!} (x+y)^m \end{aligned}$$

(Binomio di Newton)

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

Questo dimostra che se pongo in astratto

$$\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{che converge assolut. per ogni } x \text{ per il criterio } \dots)$$

allora questa funzione verifica

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \begin{array}{cc} \forall x \in \mathbb{R} & \forall y \in \mathbb{R} \\ \in \mathbb{C} & \in \mathbb{C} \end{array}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 121

Note Title

06/05/2026

SIMBOLI DI LANDAU Setting : $D \subseteq \mathbb{R}$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad g: D \rightarrow \mathbb{R}$$

 x_0 p.to di acc. per D (vale con opportune modifiche anche
con $x_0 = +\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$)

Si dice che

 $\rightarrow f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se posso scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \forall x \in D \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

 $\rightarrow f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se ... $\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$ $\rightarrow f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se ... e w limitata in un intorno di x_0 cioè esistono $r > 0$ e $M \in \mathbb{R}$ tali che

$$|w(x)| \leq M \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap D$$

Equivalentemente

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} |w(x)| \in \mathbb{R}$$

Oss. Quando posso dividere, le definizioni coinvolgono limiti di

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Esempi 1 $\sin x = O(x)$ per $x \rightarrow 0$? OK $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$? OK $\sin x^2 = O(x^2)$ per $x \rightarrow 0$? OK $\sin x^2 = O(x)$ per $x \rightarrow 0$? OK

Fatto 1 $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$
 $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$

Esempio 2 $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$ OK

Devo fare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}{x^5} = \frac{1}{5}$

Fatto generale Taylor

$$f(x) = P_m(x) + o(x^m) \quad \text{vera}$$

$$f(x) = P_m(x) + O(x^m) \quad \text{vera ma buffa}$$

$$f(x) = P_m(x) + O(x^{m+1}) \quad \text{quasi sempre vera}$$

↑
vera se f ammette $P_{m+1}(x)$

Moralmente: $O(x^m)$ si mangia tutte le potenze (per $x \rightarrow 0$)
 con esponente $> m$.

$O(x^m)$... esponente $\geq m$.

Esercizio Supponiamo $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow 0$
 $g(x) = o(r(x))$ per $x \rightarrow 0$

Allora $f(x) = o(r(x))$

$f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$ ω_1 limitata vicino a 0

$g(x) = r(x) \cdot \omega_2(x)$ $\omega_2(x) \rightarrow 0$

Allora

$$f(x) = r(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x) \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \rightarrow 0}$$

Discorso analogo se $f(x) = o(g(x))$
 $g(x) = O(r(x))$

Restatement Se $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è unif. cont., allora
 $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow +\infty$

Dim A suo tempo abbiamo visto che $|f(x)| \leq Ax + B$
 Ma allora

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{Ax+B}{x} = A$$

$g(x) \nearrow x$

Esercizio $f(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$

Cosa possiamo dire del comportamento per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$?

Brutal mode: $f(x) \sim \int_0^x 1 dt \sim x$

Rigoroso: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \underset{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = 1$

Risposta: $f(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$ anche $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$

Brutal mode $0 \leq f(x) \leq \int_0^x e dt = ex$ quindi $f(x) = O(x)$
 per $x \rightarrow +\infty$

In realtà quello che ho scritto è rigoroso!

Questo basta per dire che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{\leq e} \cdot \frac{1}{x}$$

Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

$$f(x) \geq \int_0^x e^{-t} dt = \frac{x}{e}$$

Quindi se $f(x) \sim cx$, allora $\frac{1}{e} \leq c \leq e$

CLAIM: $c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{sit} dt$ (questo è quanto guadagna ogni periodo)

Tentativo: sappiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (visto che $f(x) \geq \frac{x}{e}$)

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{sux} = \text{N.E.}$
 $\uparrow$
 $\frac{+\infty}{+\infty} \leadsto \text{Hop}$

[Achtung! Non posso dedurre nulla quando il lim $\frac{f'}{g'} = \text{N.E.}$]

Come dimostro il claim?

Prendo x e sia n tale che $2\pi(n) \leq x \leq 2\pi(n+1)$

Allora $f(x) = \int_0^x e^{sit} dt \leq \int_0^{2\pi(n+1)} e^{sit} dt = \underbrace{2\pi c}_{\substack{\uparrow \\ \text{valore} \\ \text{in ogni} \\ \text{periodo}}} \underbrace{(n+1)}_{\substack{\text{numero} \\ \text{dei periodi}}}$

quindi $f(x) \leq 2\pi c(n+1) \leq 2\pi c \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right)$
 $\uparrow$
 $2\pi n \leq x$

Analogamente dal basso

$$f(x) \geq 2\pi c n \geq 2\pi c \frac{x-2\pi}{2\pi}$$

Quando divido per x trovo

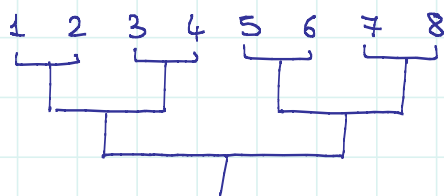
$$\underbrace{2\pi c \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right) \frac{1}{x}}_c \leq \frac{f(x)}{x} \leq \underbrace{2\pi c \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right) \frac{1}{x}}_c$$

Esempio Se voglio ordinare n numeri, quanti confronti devo fare

Risposta easy : $O(n)$ (in realtà $n-1$)

Risposta migliore : $O(n \log n)$ in realtà $\lceil \log_2 n \rceil$
 ↑ parte intera superiore

Faccio il torneo a eliminazione diretta



Tutto questo solo per trovare il più grande

Le cose cambiano se voglio trovare l'ordinamento completo

→ risposta easy : $O(n^2)$

→ risposta migliore : $O(n \log n)$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 122

Note Title

06/05/2026

Come dimostro che $f(x)$ NON è derivabile in un certo x_0 dato?

MODO STANDARD Faccio vedere che il rapporto incrementale non ha limite

Esempio $f(x) = |\sin x|$ $x_0 = 0$

Da destra $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$

Da sinistra $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\sin h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1$

GRANDE TENTAZIONE $f(x) = \sin x$ per $x \in (0, \pi)$
 $f'(x) = \cos x$ per $x \in (0, \pi)$

$f(x) = -\sin x$ per $x \in (-\pi, 0)$

$f'(x) = -\cos x$ per $x \in (-\pi, 0)$

Ora osservo che

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$

e quindi $f'(0)$ NON esiste

C'è un buco logico: nessuno impedisce a $f'(0)$ di esistere e di essere diversa dai limiti.

In realtà è vero perché

Fatto generale $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$
 se questo esiste

$$\boxed{\text{Dim}} \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{h \cdot f'(c(h))}{h} \quad x_0 < c(h) < x_0+h$$

$\uparrow$
 Lagrange
 $\downarrow$
 x_0^+

Passando al limite per $h \rightarrow 0$ ho la tesi

Stessa cosa vale a x_0^- .

Domanda: esistono funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili ovunque ma con derivata discontinua

SI Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

È ovvio che $f'(x)$ esiste per $x \neq 0$

È facile che $f'(0)$ esiste perché $f(0) = 0$ e $f(x) = O(x^2)$ per $x \rightarrow 0$
 (basterebbe $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$)

Inoltre $f'(0) = 0$ per il conto appena fatto.

Per $x \neq 0$:

$$f'(x) = \underbrace{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}_0 + \underbrace{x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{per colpa di questo il limite per } x \rightarrow 0 \text{ non esiste}}$$

PROPRIETÀ DI DARBOUX DELLE DERIVATE

Supponiamo $f: (x_0-r, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ovunque.

Allora

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

$$\boxed{\text{Dim}} \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(c(h))$$

$\uparrow$
 compreso tra x_0 e x_0+h

Ora basta fare $\liminf$ e $\limsup$ a δx e $-\delta x$.

Oss. Perché non posso fare il liminf a dx e sx e dedurre che

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \liminf_{h \rightarrow 0} f'(c(h)) \\ &= \liminf_{x \rightarrow x_0} f'(x) \end{aligned}$$

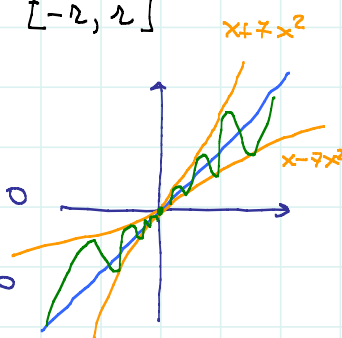
Il problema è l'ultima uguaglianza perché $f'(c(h))$ è in qualche modo una s.succ. di $f'(x)$ e quindi l'ultimo = in realtà è $\geq$ e salta tutto.

Con il limsup è dalla parte giusta.

Esempio Funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile ovunque, $f'(0) = 1$
 f non monotona in nessun intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$
 wlog $f(0) = 0$.

Prendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 7x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



È derivabile ovunque? Sì: $f(x) = x + 7 \cdot$ esempio precedente
 $f'(0) = 1$

È anche ovvio che $f(x) > 0$ per $x > 0$ piccolo
 $f(x) < 0$ per $x < 0$ piccolo

Se fosse monotona in $[-\varepsilon, \varepsilon]$ avremmo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$
 Ma

$$f'(x) = 1 + \underbrace{14x \sin \frac{1}{x}}_0 + 7x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Per $x \rightarrow 0$, $f'(x)$ oscilla tra -6 e 8 , quindi ci sono tanti intervallicini vicini a 0 in cui f è decrescente !!!
 — 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 123

Note Title

07/05/2026

DARBOUX VS RIEMANN Problema: definire $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$

dove $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa due ipotesi:

(i) $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f limitata)

(ii) $\exists [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0$ per ogni $x \notin [a, b]$ (f nulla fuori da un limitato)

Tre possibili approcci

→ DARBOUX INCLUSIVO

→ DARBOUX ORTODOSSO

→ RIEMANN

Darboux inclusivo Step function = funzioni a gradino

$$I_{DI}^+(f) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx : \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \right. \\ \left. \varphi \text{ step function} \right\}$$

$$I_{DI}^-(f) := \sup \{ \dots \quad \varphi(x) \leq f(x) \quad \dots \}$$

Se coincidono, allora $\int$

Darboux ortodossa Si parte da una partizione P , cioè

$$x_0 < x_1 < \dots < x_m \quad (m \text{ dipende da } P)$$

e si pone

$$S_{DO}^+(f, P) := \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) \sup \{ f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$S_{DO}^-(f, P) := \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) \inf \{ f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

Moralmente: costruisco step function sopra e sotto risparmiando il più possibile

Assumiamo sempre per semplicità $x_0 \leq a$ e $x_m \geq b$

A questo punto possiamo definire

$$I_{\text{do}}^+(f) := \inf \{ S_{\text{do}}^+(f, P) : P \text{ partizione} \}$$

$$I_{\text{do}}^-(f) := \sup \{ S_{\text{do}}^-(f, P) : P \text{ partizione} \}$$

Oss. Nella definizione DI ho "due gradi di libertà" (partizione + altezze dei rettangoli in ogni intervallo)

Nella def. DO ho "un solo grado di libertà" (partizione, poi le altezze sono automatiche).

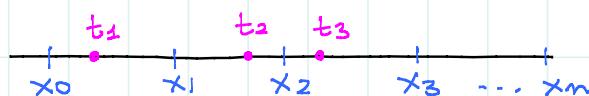
RIEMANN

Def 1 Si dice diametro di una partizione P il numero

$$\text{diam}(P) := \max \{ x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n \}$$

↑ max length. di un intervallo

Def 2 Si dice partizione taggata e si indica con (P, T) una partizione $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e una scelta di p.ti $T = (t_1, \dots, t_n)$ con $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$



Def 3 Data una part. taggata (P, T) , Riemann definisce

$$S_R(P, T) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

↑
somma di Riemann

Integrale di una step function
che ogni intervallo vale $f(t_i)$

Def (Integrale di Riemann)

Si dice che f è integrabile secondo Riemann se esiste $I \in \mathbb{R}$ (che a posteriori sarà l'integrale) tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (P, T) \quad \text{diam}(P) \leq \delta \Rightarrow |I - S_R(P, T)| \leq \varepsilon$$

(morale: le somme di Riemann sono vicine a I quando $\text{diam}(P)$ è abbastanza piccolo, indipendentemente da T)

Oss 1 Non usa mai la struttura di ordine in $\mathbb{R}$ (si estende a contesti più generali)

Oss 2 Come scritta, uno produce integrali inferiori o superiori (esercizio: si può modificare in modo da produrli?)

TEOREMA Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con le due proprietà fondamentali. Allora le 3 definizioni di integrale sono equivalenti

Dim $DI \Leftrightarrow DO$ Più in generale sono equivalenti i loro integrali inferiori e superiori.

Vediamo per i superiori

→ è ovvio che $S_{DI}^+(f) \leq S_{DO}^+(f)$

(sto facendo $\sup$ sulle step funct. inclusive che sono di più di quelle ortodosse)

→ è quasi ovvio che $S_{DO}^+(f) \leq S_{DI}^+(f)$

(per ogni s.f. inclusiva, ne trovo una ortodossa con integrale $\leq$, perché uso la stessa partizione e risparmio sulle attese)

Dim $R \Rightarrow D0$ Sia I l'integrale di Riemann.

Dico che I è anche l'integrale di Darboux.
Basta dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione P t.c.

$$S_{D0}^+(f, P) \leq I + \varepsilon$$

$$S_{D0}^-(f, P) \geq I - \varepsilon$$



Basta prendere P in modo che $\text{diam}(P) \leq \delta$, dove $\delta > 0$ è quello che corrisponde a ε nella definizione di Riemann. Infatti sappiamo che, quando $\text{diam}(P) \leq \delta$, allora

$$I - \varepsilon \leq S_R(P, T) \leq I + \varepsilon \quad \text{per ogni tag } T$$

Scegliendo τ opportuni in ogni intervallo di P , posso fare in modo che $S_P(P, T)$ si avvicini quanto voglio a $S_{D0}^+(f, P)$ oppure $S_{D0}^-(f, P)$.

Morale: le somme di $D0$ sono particolari somme di R , corrispondenti a tag opportuni).

Ponte dura: $D \Rightarrow R$ Ipotesi: f integrabile DI , cioè per i noti criteri di integrabilità

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ tali che}$$

$\uparrow$ step functions $\uparrow$

$$\int \psi(x) dx \leq I + \frac{1}{2} \varepsilon$$

$\uparrow$ int. di DI

$$\int \varphi(x) dx \geq I - \frac{1}{2} \varepsilon$$

$\uparrow$ int. di DI

Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e voglio trovare $\delta > 0$ per cui funziona Riemann, cioè

$$|S_R(P, T) - I| \leq \varepsilon \quad \text{se } \text{diam}(P) \leq \delta$$

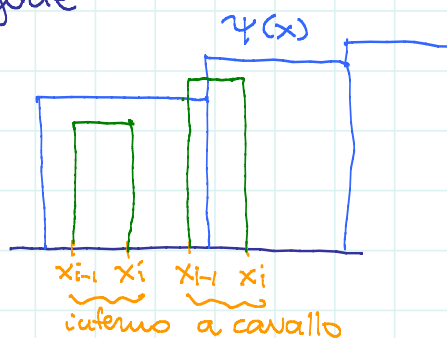
Wlog posso supporre che φ e ψ prendano valori in $[-M, M]$ e che siano definite a partire da una stessa partizione Q con un certo numero m di p.ti.

Dico che basta prendere

$$\delta \leq \text{diam}(Q) \quad \text{e} \quad \delta \leq \frac{1}{(m+1)(M+1)} \frac{1}{8} \varepsilon$$

Perché funziona? Prendiamo $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ con $\text{diam} \leq \delta$
Dividiamo gli intervallini in due categorie

$I_{\text{int}} = \{i \in \{1, \dots, m\} : [x_{i-1}, x_i] \text{ è interno ad un intervallo della partizione } Q\}$



$C_{\text{av}} = \{i \in \{1, \dots, m\} : [x_{i-1}, x_i] \text{ è a cavallo}\}$

Adesso

$$S_R(P, T) := \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) \varphi(t_i)$$

$$= \sum_{\substack{i \in I_{\text{int}} \\ x_i}} (x_i - x_{i-1}) \varphi(t_i) + \sum_{i \in C_{\text{av}}} (x_i - x_{i-1}) \varphi(t_i)$$

$$\leq \int_{x_{i-1}} \psi(x) dx + (m+1) \delta M$$

$\begin{matrix} \text{perché } \varphi(t_i) \leq \psi(t_i) & \uparrow & \# \text{ int. a cav.} & \uparrow & \max_{x_i - x_{i-1}} & \nwarrow & \max \varphi(t_i) \end{matrix}$

$$= \underbrace{\int \psi(x) dx}_{\leq I + \frac{1}{2} \varepsilon} - \underbrace{\sum_{i \in C_{\text{av}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi(x) dx}_{\leq \sum_{i \in C_{\text{av}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi(x)| dx} + \underbrace{(m+1) \delta M}_{\leq \frac{1}{8} \varepsilon}$$

$$\leq (m+1) \delta M$$

$$\leq \frac{1}{8} \varepsilon$$

$$\leq I + \varepsilon \quad (\text{forse bastava } \frac{1}{4} \text{ invece di } \frac{1}{8}).$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 124

Note Title

07/05/2026

Esercizio 1 Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (\sin x)^n dx = 0$

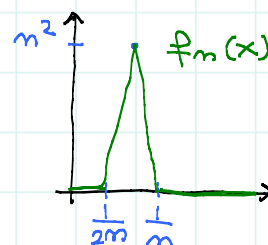
Dav. sbagliata: per ogni $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ vale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin x)^n = 0$$

quindi "passo al limite sotto l'integrale" e viene 0.

Esempio Prendiamo $f_n(x)$ come in figura.

Allora, per ogni $x \in [0, 1]$, senza eccezioni, vale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

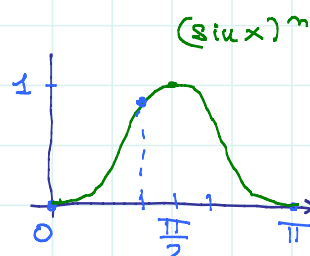


tuttavia $\int_0^1 f_n(x) dx = \text{area} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{n^2}_{\text{altezza}} \rightarrow +\infty$

Sol. esercizio 1 Fisso $\varepsilon > 0$

Scrivo

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \dots$$



Ora

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \underbrace{(\sin x)^n}_{\leq 1} dx \leq 2\varepsilon$$

Inoltre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \underbrace{(\sin x)^n}_{\leq \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n} dx = \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} (\sin x)^n dx \leq \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n$$

Mettendo insieme

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^n dx \leq 2\varepsilon + 2 \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}_0 \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right]^n}_0$$

Vorrei fare $\lim a dx$ e sx , ma non so che esiste a sx , quindi faccio

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (\sin x)^n dx \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \text{RHS} = 2\varepsilon$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, questo mi dice che $\limsup \int \dots \leq 0$

La disuguaglianza $\liminf \int_0^{\pi} \dots \geq 0$ è banale perché l'integro non è ≥ 0 .

Esercizio Dimostrare che $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ è integrabile in $[-1, 1]$

Per ogni $\varepsilon > 0$, devo trovare step funct

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

t.c.

$$\int_{-1}^1 (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$



Facciamo un buco tipo $[-\frac{1}{8}\varepsilon, \frac{1}{8}\varepsilon]$ intorno all'origine.

Lì mettiamo $\varphi \equiv -1$ e $\psi \equiv 1$

$$\text{Pagheremo } 2 \cdot \frac{1}{4} \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon$$

Ora su $[\frac{\varepsilon}{8}, 1]$ e su $[-1, -\frac{\varepsilon}{8}]$ la $f(x)$ è integrabile perché continua, quindi su entrambi gli intervalli posso definire φ e ψ in modo da pagare meno di $\frac{1}{4} \varepsilon$.

Fatto generale

Allo stesso modo si dimostra che sono integrabili tutte le funzioni continue tranne un numero finito di p.ti (ovviamente anche limitate)

ANALISI 1 - LEZIONE 125

Note Title

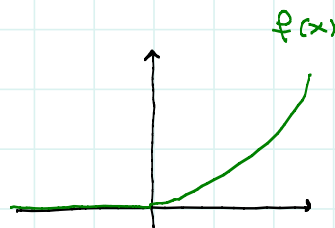
11/05/2026

EPPUR SI MUOVE

Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

(i) $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$

(ii) $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$



Dalla (i) e dall'essere C^∞ segue che

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$$

- Le derivate sono tutte nulle ... eppur si muove
- Tutti i suoi polinomi di Taylor in $x=0$ sono $\equiv 0$, quindi

$$f(x) = o(x^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi è "infinitamente piatta".

- La sua serie di Taylor converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma non converge a $f(x)$ che quindi NON è analitica.

Un esempio è $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$

Altri esempi possibili: $f(x) = e^{-1/x^2}$ per $x \neq 0$

↑ tutte le derivate nulle per $x=0$



Dim per $e^{-\frac{1}{x^2}}$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ovviamente è continua su tutto $\mathbb{R}$
 $\stackrel{!}{=} 0$ per $x \leq 0$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x > 0 \quad (e = 0 \text{ per } x < 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 \quad \left(\text{pongo } \frac{1}{x} = y \text{ e mi ritrovo } \frac{y^2}{e^y} \text{ per } y \rightarrow +\infty \right)$$

Per un noto criterio questo basta per dire che $f'(0)$ esiste e vale 0.

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^4} + e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{2}{x^3}\right) \text{ per } x > 0 \quad (e = 0 \text{ per } x < 0)$$

Ancora una volta $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0$, quindi esiste $f''(0) = 0$.

Analogamente $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_k(x)}{x^{2k}}$ con $P_k(x)$ polinomio opportuno (si dim. per induzione)

Ancora una volta $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0$, quindi $f^{(k)}(0) = 0$.

RACCORDO C^∞ Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c.

(i) $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$

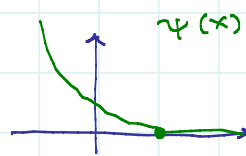
(ii) $f(x) = 1$ per ogni $x \geq 1$

(iii) $0 < f(x) < 1$ per ogni $x \in (0, 1)$

(iv) f strett. cresc. in $(0, 1)$



Sia $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$ quella di prima



$$\psi(x) = \varphi(1-x)$$

Adesso pongo

$$f(x) := \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \psi(x)}$$

Controlliamo che funzioni

$\rightarrow$ è di classe C^∞ (rapporto di C^∞ con denominatore sempre > 0)

(i) ovvia

(ii) quasi ovvia perché $\psi(x) = 0$ per $x \geq 1$.

(iii) ovvia

(iv) calcoliamo $f'(x) = \frac{\varphi'(x)(\varphi(x) + \psi(x)) - (\varphi'(x) + \psi'(x))\varphi(x)}{(\varphi(x) + \psi(x))^2}$

$$= \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{(\quad)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \varphi' & \psi \\ + & + \end{matrix} > \begin{matrix} \psi' & \varphi \\ - & + \end{matrix}$$

Esercizio di Analisi 3Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.Sia $\varepsilon > 0$.Allora esiste $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c.

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon$$

Moralmente: esiste una g C^∞ il cui grafico è molto vicino al grafico della f (la quale può essere orribile).

Dim Caso banale: f è multiplo della funzione caratteristica di un intervallo

Basta fare due raccordi molto

stretti dalle due parti

Basta stimare l'integrale della differenza

con $|x|$ lungo intervalli in cui non coincidono



Caso semibanale: f è una step function, cioè comb. lin. di casi banali ~ comb. lin. delle g corrispondenti

Caso generale: Data f integrabile, trovo φ step funct. tale che

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Per il caso semibanale esiste g di classe C^∞ tale che

$$\int_a^b |\varphi(x) - g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

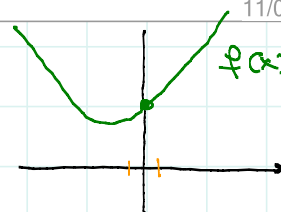
Concludo con la triangolare.

Nello stesso banale: posso supporre che g sia addirittura un polinomio?

ANALISI 1 - LEZIONE 126

Note Title

11/05/2026

Esercizio 1 $f(x) = x^2 + e^x$ 

(1) Dimostrare che è invertibile in un intorno di 0

Esiste $\delta > 0$ ed esiste $r_1 > 0, r_2 > 0$ t.c. $f: [-\delta, \delta] \rightarrow [1-r_1, 1+r_2]$
 è iniettiva e surgettiva

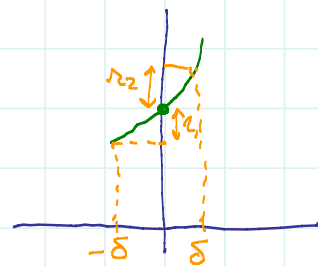
$f'(0) = 1$ (lo vedo da Taylor :) $\leadsto$ esiste $\delta > 0$ t.c. $f'(x) \geq \frac{1}{2}$
 per ogni $x \in [-\delta, \delta]$.

A quel p.to posso

$$f(-\delta) = 1 - r_1$$

$$f(\delta) = 1 + r_2$$

Iniettività e surgettività sono garantite
 da monotonia e teo. esist. zero



(2) Detta g l' inversa, calcolare $g(1)$, $g'(1)$ e $g''(1)$.

$$g(1) = 0, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \leadsto \quad g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

↑
formula per
inversa

$$g''(x) = \underbrace{-\frac{1}{[f'(g(x))]^2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{deriv} \\ g'(x)}} \cdot \underbrace{f''(g(x)) \cdot g'(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{sostituisco}}} = -\frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$$

Quando metto $x=1$ viene $-\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = -f''(0) = -3$

Oss. Teoricamente posso andare avanti con $g^{(3)}, \dots, g^{(k)}$

(3) Calcolare lo sviluppo di Taylor di $g(x)$ con centro in $x=1$.

$$g(1+h) = g(1) + g'(1) \cdot h + \frac{1}{2} g''(1) h^2 + \frac{1}{6} g'''(1) h^3 + \dots$$

Senza calcolare le derivate esplicitamente.

$$g(1+h) = ah + b h^2 + c h^3 + d h^4 + o(h^4)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$1+h = f(g(1+h)) = f(ah + b h^2 + c h^3 + d h^4 + o(h^4))$$

$$= 1 + \underbrace{ah + b h^2 + c h^3 + d h^4}_x + \frac{3}{2} (a^2 h^2 + b^2 h^4 + 2ab h^3 + 2ac h^4) + \frac{1}{6} (a^3 h^3 + 3a^2 b h^4) + \frac{1}{24} (a^4 h^4) + o(h^4)$$

$$a = 1 \quad (\text{coeff } h)$$

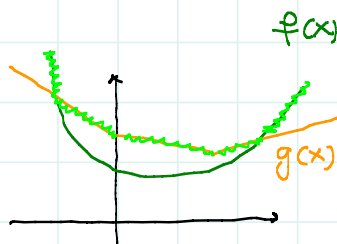
$$b + \frac{3}{2} a^2 = 0 \quad (\text{coeff } h^2) \quad \leadsto b = -\frac{3}{2}$$

$$c + 3ab + \frac{1}{6} a^3 = 0 \quad (\text{coeff } h^3) \quad \leadsto \text{trovo } c$$

$$\dots \quad \leadsto \text{trovo } d$$

Esercizio 2 Il max tra due convesse è convesso?

Semberebbe di sì ☺



Dim Prendo f e g e pongo

$$m(x) = \max \{ f(x), g(x) \}$$

$$\text{Claim: } m(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda m(x) + (1-\lambda)m(y)$$

$$\text{wlog: } \text{LHS} = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$\uparrow$
 f convessa

$$\leq \lambda m(x) + (1-\lambda)m(y)$$

$\uparrow$
 $f \leq m, \lambda \text{ e } 1-\lambda \geq 0$

Esercizio 2 bis Il sup di una famiglia qualunque di convesse
è convesso (supposto che il sup venga reale)

Prendo una famiglia $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ di funt. convesse.

Pongo $S(x) := \sup \{f_i(x) : i \in I\}$

Non funziona il wlog di prima.

Però... per ogni $i \in I$

$$\begin{aligned} f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f_i(x) + (1-\lambda)f_i(y) \\ &\leq \lambda S(x) + (1-\lambda)S(y) \end{aligned}$$

Adesso che RHS è fisso, posso fare il sup del LHS e ottenere

$$S(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \text{RHS} \quad \text{!}$$

Oss. Una f è convessa $\Leftrightarrow$ il sopragrafico è convesso in $\mathbb{R}^2$

Il sopragrafico dell' $\cap$ è l' $\cap$ dei sopragrafici

L'intersezione di convessi è convessa

— o — o —

[VF1] Se $0 \leq b_n \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora di sicuro $\sum a_n$ converge

MA CHE DICI!

[VF2] $\forall x \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R}$ tale che $x^{77} \geq M$

V Prendo $M = x^{77}$

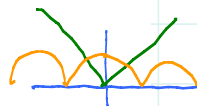
[VF3] La funzione $f(x) = \cos^3 x$ è dispari

F è pari !

[VF4] $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$

V

[VF5] L'equazione $|x| = |\cos(3x)|$ ha almeno una soluzione reale



V

[VF6] La soluzione generale dell'equazione differenziale $u'' = 4u$ è $u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$

$$\lambda^2 = 4 \quad \lambda = \pm 2 \quad V$$

[VF7] Se $a_n \rightarrow 4$, allora di sicuro $a_{n!} \rightarrow 4$

V sottosucc !

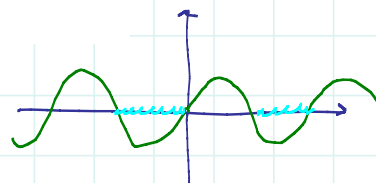
[VF8] $\arctan(x - x^4) = x + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$$F! \quad \arctan(x - x^4) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

MC1 Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq 0\}$.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme A è vera.

- (A) A è limitato superiormente (B) esiste $\min A$ (C) $\sup A \in \mathbb{R}$ ~~(D) $6\pi \in A$~~
(E) A ammette minoranti



$$\inf \{x \in \mathbb{R} : |x - 12| \leq 2\} = \dots$$



[Test risolti a voce nel video]

ANALISI 1 - LEZIONE 127

(-4 ☺)

Note Title

13/05/2026

Insiemi numerici : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ Def. I numeri naturali sono una terma $(\mathbb{N}, 0, s)$ dove

- $\mathbb{N}$ è un insieme
 - $0 \in \mathbb{N}$
 - $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che (moralmente è il successivo)
 - (i) s è iniettiva
 - (ii) l'immagine di s è $\mathbb{N} \setminus \{0\}$
 - (iii) $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ se
 - $0 \in A$
 - $\forall m \in \mathbb{N} \quad m \in A \Rightarrow s(m) \in A$
 allora $A = \mathbb{N}$.
- } no junk
} no confusion
} induzione

Esercizio Pensare a strutture strane senza la (ii)Teorema I naturali esistono e sono unici a meno di isomorfismi.Cioè se $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{0}, \hat{s})$ sono altri naturali, allora esiste $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ tale che

- φ è iniettiva e surgettiva
- $\varphi(0) = \hat{0}$
- $\varphi(s(m)) = \hat{s}(\varphi(m)) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Idea dimEsistenza : praticamente un assioma della teoria degli insiemi.Unicità Come definisco la φ ? Usando le ultime due richieste.

Devo accertarmi che sia ben definita, iniettiva e surgettiva.

[Alcune parole nel video]

Operazioni su $\mathbb{N}$

Addizione $a + 0 = a$
 $a + s(m) = s(a + m)$ } definisce $a + m \quad \forall a \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Esercizio : Dimostrare che è commutativa e associativa
 (hint: è una pena)
 (Natural Number Game in LEAN)

Moltiplicazione $a \cdot 0 = 0$
 $a \cdot s(m) = a \cdot m + a$

Solite comode proprietà da dimostrare

Relazione d'ordine $a \leq b$ se e solo se $\exists c \quad a + c = b$
 — 0 — 0 —

Definizione di $\mathbb{Z}$ Via possibile $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \text{coppie } (m, \text{segno})$
 con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, segno $\in \{+, -\}$

Via canonica: moralmente $z \in \mathbb{Z}$ è differenza di 2 tizi di $\mathbb{N}$

Prendo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e metto la relazione
 $(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$
 $m_1 - m_1 = m_2 - m_2$

Verifica: si tratta di una relazione di equivalenza.

A questo punto

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \quad [\text{classi di equivalenza}]$$

Devo definire le operazioni

$$\underset{z_1}{[(a_1, b_1)]} + \underset{z_2}{[(a_2, b_2)]} = [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)]$$

Occorre far vedere che è ben posta, cioè non dipende dai rappresentanti, quindi passa al quoziente

$$\underset{(a_1 - b_1)}{[(a_1, b_1)]} \cdot \underset{(a_2 - b_2)}{[(a_2, b_2)]} = [(a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)]$$

Si verifica la buona positura e tutte le proprietà di somma e prodotto.

— o — o —

Def. di $\mathbb{Q}$ Pseudo coppia $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ ($0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Dico

$$\underset{\frac{a}{b}}{(a, b)} \sim \underset{\frac{\hat{a}}{\hat{b}}}{(\hat{a}, \hat{b})} \iff a\hat{b} = \hat{a}b$$

Verifico che è una rel. di equivalenza e chiamo $\mathbb{Q}$ il quoziente

Poi definisco le operazioni:

$$\underset{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{[(a, b)]} + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$$

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$$

Verifico la buona positura e tutti gli assiomi di campo.

— o — o —

Def. di $\mathbb{R}$ Via breve : DEDKIND CUTS (sezioni di $\mathbb{Q}$.)

Chiamo semiretta sinistra un sottoinsieme ^A di $\mathbb{Q}$ con queste proprietà

- A ammette almeno un maggiorante
- se $a \in A$ e $b \leq a$, allora $b \in A$
- A non ammette massimo ($\forall a \in A \exists b \in A \ b > a$)

(è una semiretta "aperta")

A questo punto $\mathbb{R}$ = insieme delle semirette svinse di $\mathbb{Q}$

Devo definire le operazioni

→ semplice per la somma ($A_1 + A_2$ = somma possibile coppie)

→ pena per il prodotto (i seguenti sono un problema)

~ verifica che è un campo

Mi serve un ordinamento (inclusione insiemistica di semirette)

Serve l'assioma di continuità (moralmente il sup di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è il reale corrispondente all'unione delle semirette corrispondenti agli elementi)

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 128

Note Title

13/05/2026

Esistenza di $\mathbb{R}$: sezioni di Dedekind + molte verifiche

Unicità. Detto bene: $\mathbb{R}$ è una coppia $(\mathbb{R}, \leq)$ dove $\mathbb{R}$ è un campo e $\leq$ è una relazione d'ordine compatibile con le operazioni di campo per cui vale l'assioma di continuità.

Se $(\mathbb{R}, \leq)$, allora esiste $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

(i) φ è iniettiva e surgettiva

(ii) φ è iso di campi (commuta con le operazioni)

(iii) se $x \leq y$, allora $\varphi(x) \leq \varphi(y)$

Come costruisco φ ?

→ Intanto $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$

→ poi entrano in gioco le "iniezioni", cioè vedere $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (vanno costruite

$i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce come

$$i(0) = 0$$

$$i(s(m)) = i(m) + 1$$

e poi con pazienza si costruiscono le stesse su $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

→ possiamo $\varphi(m) = m$, cioè $\varphi(i(m)) = i(m)$

e quindi abbiamo definito φ sull'immagine di $\mathbb{N}$.

→ Poi si estende all'immagine di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

→ Si mostra che φ manda semirette sinistre di $\mathbb{Q}$ in semirette sinistre di $\mathbb{Q}$ ed il gioco è fatto.

Dopo averla definita, restano da verificare le proprietà.

— o — o —

Funzioni razionali cioè polinomio / polinomio

Parto da $\mathbb{R}[x]$ anello dei polinomi e faccio la stessa costruzione che ha portato a $\mathbb{Q}$. Otengo un campo.

Su questo campo posso definire una relazione d'ordine

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \geq \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{se e solo se la disug. vale per ogni } x \text{ abbastanza grande}$$

Si verifica che la relazione è compatibile con le op. algebriche

Qui non possono valere

→ assioma di continuità

→ proprietà archimedea

Assioma continuità

A = polinomi costanti

B = polinomi bx con $b > 0$

Si verifica che nessuno può stare in mezzo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq c \rightsquigarrow \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow +\infty \rightsquigarrow \deg(P) > \deg(Q)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < bx \rightsquigarrow \frac{P(x)}{xQ(x)} < b \rightsquigarrow \deg(Q) \geq \deg(P)$$

Proprietà archimedea

$$P(x) = 2026 \quad Q(x) = x$$

$P(x) \geq 0$, $Q(x) \geq 0$, ma non esiste un multiplo INTERO di $P(x)$ che supera $Q(x)$.

— 0 — 0 —

BRAVATA 1

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Parto dall' integrale Gaussiano $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Per a positivo calcolo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{a}} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{a}x = y$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{a}} dy$$

Il cambio di variabili nell' integrale improprio si giustifica

Ora prendo $a=i$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2}}{1+i} \sqrt{\pi} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}$$

Uguagliando parte reale e immaginaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{Per parità divido per 2.}$$

BRAVATA 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici (event. complesse con molteplicità)

Quanto fanno

$$\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} = ?$$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^2} = ?$$

Basta osservare che $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sono le radici di $P(\frac{1}{x})$, cioè alla fine le radici di

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

ANALISI 1 - LEZIONE 129

-2 ☺

Note Title

14/05/2026

Esercizio 1 Sia $A = \{m \geq 1 : m \text{ si scrive in base 10 senza usare la cifra 6}\}$

Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{m \in A} \frac{1}{m}$$

$$\sum_{m \in A} \frac{1}{m^\alpha}$$

Sorpresa: la prima serie converge! (Morale: gli elementi di A sono "pochi" e "rari")

Come lo dimostro?

Raggruppo i termini a seconda del numero di cifre

$$A_i = \{m \in A : m \text{ ha } i \text{ cifre}\}$$

$$\sum_{m \in A} \frac{1}{m} = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{m \in A_i} \frac{1}{m}}_{\text{sommatoreia finita}} \quad (\text{Risultati di raggruppamento})$$

$$\text{Osservo che } \sum_{m \in A_i} \frac{1}{m} \leq \frac{1}{10^{i-1}} \cdot \# A_i = 8 \cdot 9^{i-1}$$

$\uparrow$ massimo el. in A_i $\uparrow$ Numero elem di A_i

$$\text{ora } \# A_i = 8 \cdot 9^{i-1} \quad \text{per } i \geq 1$$

$\uparrow$ 1a cifra in 8 modi $\uparrow$ restanti cifre in 9 modi

Quindi

$$\sum_{m \in A} \frac{1}{m} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} \quad \text{e questa converge!}$$

Vediamo caso con α variabile. Come prima

$$\sum_{m \in A_i} \frac{1}{m^\alpha} \leq \frac{1}{10^{\alpha(i-1)}} \cdot 8 \cdot 9^{i-1} = 8 \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^{i-1}$$

Quando somma per $i = 1, \dots, \infty$ converge se

$$\frac{9}{10^\alpha} < 1, \text{ cioè } 10^\alpha > 9, \text{ cioè } \alpha \log 10 > \log 9$$

$$\text{cioè } \alpha > \frac{\log 9}{\log 10}$$

di poco sotto 1

Resta da dimostrare che per $\alpha \leq \frac{\log 9}{\log 10}$ converge. Mi serve la stima opposta

$$\sum_{n \in A_i} \frac{1}{n^\alpha} \geq 8 \cdot 8^{i-1} \cdot \frac{1}{10^{i\alpha}} = \frac{8}{9} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^i$$

e si conclude facile.

"Esercizio 2" $P =$ insieme dei primi $\sum_{n \in P} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$

La serie diverge (i primi sono tanti!)

BRAVATA 4 Partiamo dal prodotto di Eulero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right)$$

[Come dire che ogni $\frac{1}{n}$ è prodotto di un numero finito di $\frac{1}{p^k}$]

$$= \prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right)$$

↑
geometrica

log prod = somma log

Ma allora $\log \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{p \in P} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right)$

$$= - \sum_{p \in P} \log \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

$$\sim \sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

↑
Taylor

Dim di ERDOS Supponiamo che converga. Elenchiamo i primi

$$p_1, p_2, p_3, \dots$$

Allora esiste k tale che

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{2} \quad \uparrow \text{va bene qualunque cosa } < 1$$

Chiamo $p_1, \dots, p_k$ primi "piccoli"

$p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ primi "grandi"

Per ogni $n \geq 1$ definisco

$$A_n = \{i \in \{1, \dots, n\} : i \text{ ha solo fattori piccoli}\}$$

$$B_n = \{i \in \{1, \dots, n\} : i \text{ ha almeno un fattore grande}\}$$

$$\text{Allora} \quad n = \#A_n + \#B_n$$

$$\text{Se dimostro che} \quad \#A_n \leq (\log_2 n)^k < \frac{n}{4} \quad \text{per } n \text{ grande}$$

$$\#B_n \leq \frac{n}{2}$$

allora abbiamo un assurdo.

$$\boxed{\#A_n} \quad \text{Ogni el. di } A_n \text{ è } p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

Tutti i k esponenti sono $\leq \log_{p_i} n \leq \log_2 n$

Ho k esponenti tutti più piccoli di $\log_2 n$ no $(\log_2 n)^k$ possibilità al massimo.

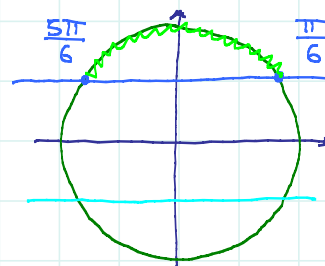
$$\boxed{\#B_n} \quad B_n = \bigcup_{i \geq k+1} \underbrace{\text{elementi divisibili per } p_i}_{\text{sono } \leq \frac{n}{p_i} \text{ (sarebbe la parte intera)}}$$

$$\text{Quindi} \quad \#B_n \leq \sum_{i \geq k+1} \frac{n}{p_i} = n \sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} \leq \frac{n}{2} \quad \ddot{\smile}$$

$\uparrow$
 certi el. li
 conto più volte

Esercizio 3 Consideriamo $a_n = \sin n$ ① $\lim a_n$ non esiste. Perché? $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ N.E. Non implica in automatico $\sin n$ non ha lim.

Claim: esistono infiniti n per cui
 n radianti vanno a posizionarsi
 tra $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$



Questo ci dice che $\sin n \geq \frac{1}{2}$ su una s.succ.

Analogamente $\sin n \leq -\frac{1}{2}$ su una s.succ.

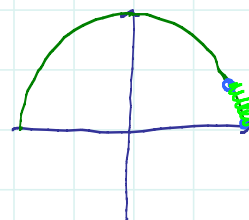
Claim più preciso: $\forall k \geq 0 \exists m_k$ t.c. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq m_k \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Basta osservare che $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} > 2$ (basterebbe 1)
 length.
 interv.

② $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sin n = 1$ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sin n = -1$

Claim molto più forte: per ogni $\alpha \in [0, 2\pi]$, per ogni $\varepsilon > 0$
 esistono infiniti n per cui n casca tra $\alpha - \varepsilon$ e $\alpha + \varepsilon$
 sulla circonferenza trigonometrica.

Sotto-claim: esistono infiniti n che cascano
 tra 0 ed ε



$$2k\pi \leq n \leq \varepsilon + 2k\pi$$

$$2\pi \leq \frac{n}{k} \leq \frac{\varepsilon}{k} + 2\pi$$

$$0 \leq \frac{n}{k} - 2\pi \leq \frac{\varepsilon}{k}$$

$$0 \leq \frac{n}{2k} - \pi \leq \frac{\varepsilon}{2k}$$

Fatto generale : ogni numero α irrazionale lo posso approssimare con un razionale $\frac{p}{q}$ che ha denominatore $\leq n$ e l'approssimazione è migliore di $\frac{1}{nq}$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$$

Caso classico $\pi = 3,1415$

$$\frac{314}{100} = \text{errore di } \frac{1}{100}$$

$$\frac{22}{7} = 3,142857$$

$$\text{denom } 7 \quad \text{errore } \frac{1}{100}$$

ANALISI 1 - LEZIONE 130

-1 ☺

Note Title

14/05/2026

Esercizio 1 Dimostrare che e è irrazionale

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Supponiamo per assurdo che $e = \frac{a}{b}$ con a e b interi.

$$\frac{a}{b} = e = \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}$$

Moltiplico per $b!$. Ottengo

$$\underbrace{a \cdot (b-1)!}_{\text{intero}} = \underbrace{b! \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!}}_{\substack{\text{intero perché} \\ b! \text{ semplifica} \\ \text{tutti i denomi}}} + b! \sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}$$

quindi anche

$$b! \sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}$$

deve essere intero. Ma noi dimostriamo che è positivo (ovvio) e < 1 . Questo sarà assurdo.

Stiamo dall'atto la serie

$$b! \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots$$

$$\leq \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \dots$$

geometrica

$$= \frac{1}{b+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^i} = \frac{1}{b+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b} < 1 \text{ se } b > 1$$

D'altra parte se $b=1$, sarebbe e intero, ma $2 < e < 3$.

Oss. Quello che fa funzionare la dim. è che la serie converge MOLTO velocemente, cioè la coda della serie è piccola anche moltiplicata per il mcm dei denominatori precedenti

Esercizio 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin(2\pi e \cdot n!).$$

↑
sospesa: sono tutti vicinissimi a 0 sulla circ. trigonometrica

Dall'esercizio precedente sappiamo che

$$n!e = \underbrace{n! \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}}_{\text{intero}} + n! \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i!}$$

$$\text{Quindi } 2\pi e \cdot n! = 2\pi \left(\text{intero} + n! \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i!} \right)$$

$$\sin(2\pi e \cdot n!) = \sin \left(2\pi n! \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i!} \right)$$

Questo tende a 0

$$2\pi n! \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{i!} = 2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) = \frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{cioè } 2\pi \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

e questo si fa con la stima di prima

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \quad \text{e si stima con la geometrica}$$

conclusione

$$\sin(2\pi e n!) \sim \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \sim \frac{2\pi}{n+1}$$

e quindi moltiplicato per n tende a 2π !
 — o — o —

INSIEME STRANO 1 Esistono aperti "piccolissimi" che contengono tutto $\mathbb{Q}$

I razionali sono numerabili, cioè esiste una succ. che contiene tutti i razionali.

Sia $q_1, q_2, q_3, \dots$ una numerazione dei razionali

Considero
$$A = \bigcup_{n \geq 1} \left(q_n - \frac{1}{2026^n}, q_n + \frac{1}{2026^n} \right)$$

È aperto perché unione di aperti.

Quanto è la sua "lunghezza"?

$$\leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{2026^n} = 2 \frac{1}{2026} \frac{1}{1 - \frac{1}{2026}} = \frac{2}{2025}$$

$\uparrow$ molti pezzi si sovrappongono $\uparrow$ raccolgo il 10 termine $\uparrow$ piccolissimo

FUNZIONI STRANE 1 $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{Q}$ -spazio vettoriale

Quindi esiste una base di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$ spazio vettoriale.

Indichiamola con $\{v_i\}_{i \in I}$

Nella base ne isolo uno che chiamo v_1 e un secondo che chiamo v_2 .

Ogni reale x lo scrivo come

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \text{altra roba (finita)}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 possono essere 0
 se vogliamo

Definisco

$$f_1(x) = c_1 u_1$$

$$f_2(x) = x - f_1(x)$$

Ossevo che $f_1(x) + f_2(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

La funzione f_1 è u_2 -periodica (e anche u_1 periodica perché $u_1 \neq u_2$)

La funzione f_2 è u_1 -periodica.

Quindi abbiamo due funzioni periodiche che sommate danno x .

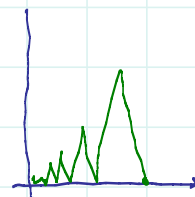
FUNZIONI STRANE 2 Sia $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continua.

È possibile che per ogni $\lambda \in [0,1]$, l'eq.

$$f(x) = \lambda$$

ha infinite soluzioni?

Se fosse per un valore posso usare
qualche tipo $x \approx \frac{1}{x}$



Fatto 1 (Hard) Se chiedo Lipschitz è impossibile

Fatto 2 In generale si può (con ogni Hölder di ordine < 1)

Trucco: usare rappresentazioni in basi strane!

→ Prendo x scritto in base 10 come $0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$

→ Traduco la rappresentazione in base 2 in qualche modo

(ad esempio: cifre pari $\mapsto 0$, cifre dispari $\mapsto 1$)

→ Definisco $f(x) =$ il nuovo numero

Questa funzione! Soggettiva (facile), ogni controimmagine è ∞
continua (tante cifre = in potenza $\mapsto$ tante cifre =
in arrivo)

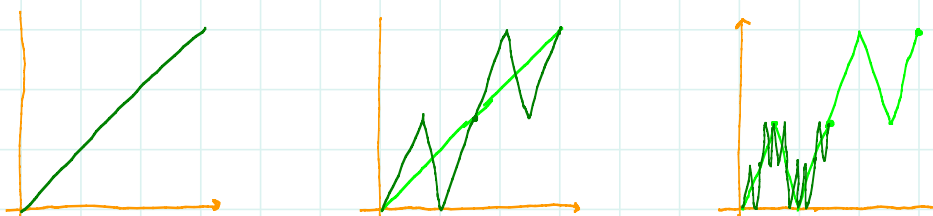
Aggiunto dopo video : mi hanno fatto notare che la funzione risultante non è continua, per colpa dei numeri che finiscono con tanti 9.

Per esempio : $f(0.4) = 0$

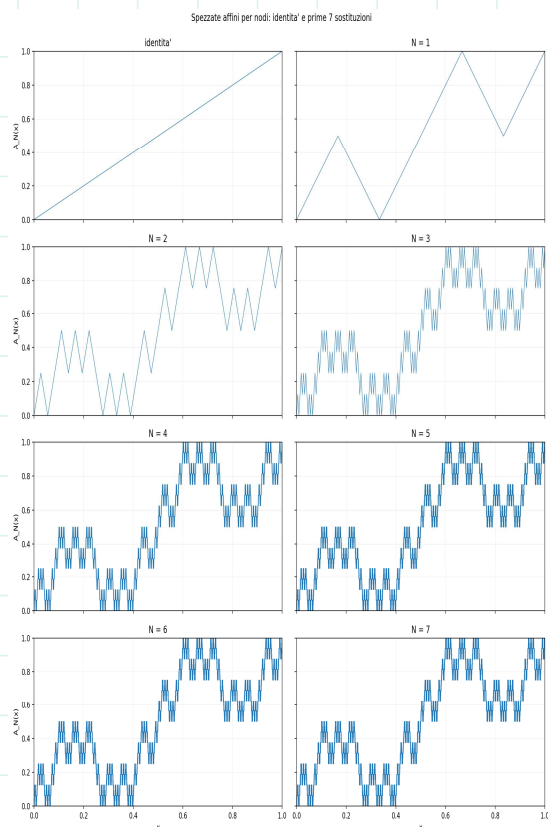
$f(0.39999) = [0.11111]_2$ cioè circa 1

e la cosa si generalizza con quanti 9 voglio.

Temo quindi che non si possa fare usando così facilmente le cifre, ma temo che bisogna usare la costruzione alla Hilbert, di cui qui disegno i primi step



Morale: ogni volta si divide in 6 ogni tratto precedente e si sostituisce con una spezzata opportuna, in su o in giù



Qui accanto più o meno quello che viene fuori dopo un po' di iterazioni.

La formula generale dovrebbe essere questa, ottenuta dopo un po' di iterazioni con una mia amica 😊

Se $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$

allora

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{k-1} \sigma(a_j) \right) \frac{\varphi(a_k)}{2^k}$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi(a_k) &= 0, 1, 0, 1, 2, 1 \\ \sigma(a_k) &= 1, -1, 1, 1, -1, 1 \pmod{6} \end{aligned}$$