

A.A. 2025/2026
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 051. Introduzione agli integrali: notazioni, significato geometrico, funzioni a gradino, definizione di integrale inferiore e superiore. Funzione di Dirichlet.	7
Lezione 052. Criterio di integrabilità. Enunciato dell'integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni continue (con dimostrazione nel caso delle monotone). Prime proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, disuguaglianza con il valore assoluto, integrabilità del prodotto, proprietà di reticolo.	11
Lezione 053. Additività dell'integrale rispetto alla zona di integrazione. Primitive, funzioni integrali e loro ruolo nel calcolo degli integrali. Lipschitzianità della funzione integrale. Teorema della media integrale.	15
Lezione 054. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Due primitive in un intervallo differiscono per una costante. Primitive elementari. Discorso sul $+c$ negli integrali. Integrabilità del valore assoluto.	20
Lezione 055. Formula di integrazione per parti. Esempi classici di applicazione. Tecnica del grande ritorno e dell'1 nascosto. Esempio paradossale utilizzando la formula senza estremi.	25
Lezione 056. Formula di integrazione per sostituzione. Esempi classici di applicazione. Primitive di potenze di seno e coseno.	30
Lezione 057. Integrazione delle funzioni razionali: descrizione dell'algoritmo, integrazione dei fratti semplici.	35
Lezione 058. Precisazioni sui passi dell'algoritmo per integrare le funzioni razionali: fattorizzazione reale di polinomi, dimostrazione della decomposizione in fratti semplici, trucco per risolvere velocemente il sistema lineare.	39
Lezione 059. Sostituzioni razionalizzanti: funzioni razionali di esponenziali, radici qualunque di funzioni razionali di primo grado, radici quadrate di polinomi di secondo grado.	44
Lezione 060. Sostituzioni razionalizzanti: formule parametriche per le funzioni razionali di seno e coseno. Interpretazione delle sostituzioni razionalizzanti in termini di parametrizzazioni razionali di curve algebriche.	49
Lezione 061. Utilizzo delle simmetrie per il calcolo di integrali. Integrali del quadrato di seno e coseno tra estremi multipli di un angolo retto. Integrali di funzioni pari/dispari. Esempi finali sul calcolo di primitive.	53

Lezione 062. Introduzione agli integrali impropri: definizione nel caso monoprobema e spezzamento nel caso con più problemi. Comportamento degli integrali impropri con potenze negative della x , sia a 0 sia all'infinito. Primi esempi di calcolo. . . .	58
Lezione 063. Criteri di convergenza per integrali impropri: confronto, confronto asintotico (casi standard e casi limite), assoluta integrabilità. Primi esempi di applicazione.	63
Lezione 064. Integrali impropri con problemi in punti diversi dall'origine. Ulteriori esempi di studio della convergenza di integrali impropri. Un integrale improprio all'infinito può convergere senza che la funzione tenda a zero.	68
Lezione 065. Esempi classici di integrali oscillanti (integrali di Dirichlet e di Fresnel) trattati mediante integrazione per parti. Metodo dei triangolini (o rettangolini) per mostrare la non assoluta integrabilità degli stessi.	72
Lezione 066. Criterio di Dirichlet per la convergenza di integrali impropri e di serie. Lemma di Abel (sommazione per parti).	77
Lezione 067. Confronto serie-integrali e applicazioni (convergenza di serie, stima di sommatorie, stima delle code di serie).	81
Lezione 068. Esempi di studio di funzioni integrali.	86
Lezione 069. Il prodotto di funzioni integrabili è integrabile. Esercizi sullo studio della convergenza di integrali impropri.	91
Lezione 070. Esercizi riassuntivi su integrali impropri, confronti serie-integrali e studio di funzioni integrali.	96
Lezione 071. Introduzione alle equazioni differenziali: nomenclatura (ordine di un'equazione, forma normale, equazioni autonome). Tre classi speciali di equazioni: a variabili separabili, lineari del primo ordine, lineari di ogni ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.	100
Lezione 072. Introduzione alle equazioni differenziali: primi esempi di famiglie di soluzioni dipendenti da parametri, problema di Cauchy, enunciato dei teoremi di sola esistenza e di esistenza ed unicità, esempio di non unicità (pennello di Peano).	105
Lezione 073. Equazioni differenziali a variabili separabili: descrizione della procedura per determinare una soluzione ed esempi di applicazione. Studio della soluzione: intervallo massimale di esistenza e life span. Alternativa tra esistenza globale, blow up e break down.	109
Lezione 074. Equazioni differenziali a variabili separabili: enunciato e dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità. Discussione di un primo esempio con valore soglia.	114
Lezione 075. Equazioni differenziali lineari omogenee: l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione uguale all'ordine dell'equazione. Nel caso di coefficienti costanti, algoritmo per determinare una base dello spazio delle soluzioni passando per le radici del polinomio caratteristico.	118

Lezione 076. Esercizi sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee. Equazioni lineari non omogenee: struttura generale dello spazio delle soluzioni. Primi esempi di ricerca per tentativi di una soluzione speciale in casi semplici (ad esempio con termini forzanti esponenziali, polinomiali, trigonometrici).	122
Lezione 077. Equazioni differenziali lineari non omogenee: metodo di variazione delle costanti per la ricerca di una soluzione. Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti qualunque: formula risolutiva, sua giustificazione (mediante fattore integrante o variazione delle costanti). Equazioni di Bernoulli.	127
Lezione 078. Riepilogo delle strategie per la ricerca euristica di soluzioni per equazioni differenziali lineari. Esercizi sulla risoluzione di equazioni differenziali.	132
Lezione 079. Esempi classici di studio di equazioni differenziali con parametri: oscillatore armonico con risonanza, oscillatore armonico con attrito, equazione lineare del primo ordine con effetto soglia.	136
Lezione 080. Esempi classici di studio di equazioni differenziali con parametri: autovalori della derivata seconda con condizioni di Dirichlet, blow up vs esistenza globale per rhs di tipo potenza, vera condizione in termini di integrali impropri.	140
Lezione 081. Introduzione alle successioni per ricorrenza. Successioni di ordine 1 lineari autonome: formula generale e sue giustificazioni. Successioni di ordine 2 lineari omogenee: formula generale (basata sulle radici del polinomio caratteristico).	144
Lezione 082. Successione di Fibonacci. Interpretazione matriciale e polinomiale della formula per le successioni per ricorrenza lineari omogenee. Successioni per ricorrenza lineari non omogenee: ricerca euristica di una soluzione (analoga alle equazioni differenziali).	149
Lezione 083. Sistemi di successioni per ricorrenza lineari: riduzione ad una successione singola. Sistemi di equazioni differenziali vs equazioni singole di ordine superiore. Legami con autovalori ed autovettori nel caso lineare. Accenno all'esponenziale di una matrice.	154
Lezione 084. Introduzione alle successioni per ricorrenza non lineari autonome del primo ordine: primi esempi di studio mediante un piano basato sulla monotonia. Interpretazione grafica.	158
Lezione 085. Successioni per ricorrenza autonome spiraleggianti: studio mediante il piano basato sulla distanza dal presunto limite ed il piano basato sulle due sottosuccessioni.	163
Lezione 086. Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza autonome: piano con la doppia iterazione per quelle spiraleggianti, ulteriori esempi di utilizzo della distanza dal presunto limite, esempi di limiti e serie con termini definiti per ricorrenza.	167
Lezione 087. Primi esempi di studio di successioni per ricorrenza non autonome: piani con la monotonia, con il rapporto, con limitatezza e confronto/carabinieri.	171

Lezione 088. Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza non autonome.	176
Lezione 089. Esempio di studio di una successione per ricorrenza non autonoma con un valore soglia.	180
Lezione 090. Ulteriori esempi di successioni per ricorrenza con comportamenti soglia. Legami tra la stabilità dei punti fissi di una funzione e valore assoluto della derivata. Esempio di successione per ricorrenza senza limite (caos).	184

ANALISI 1

-

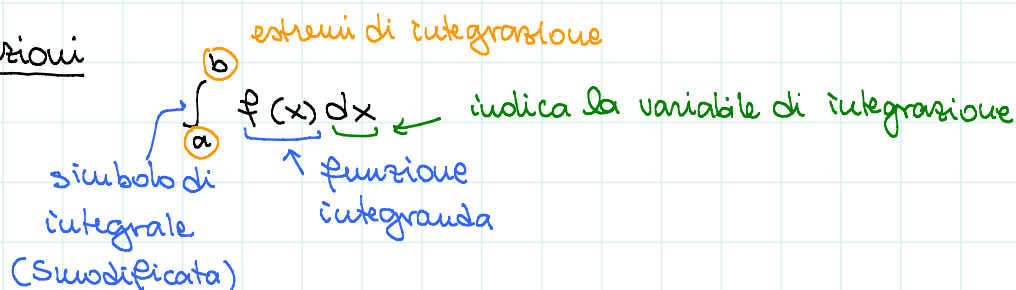
LEZIONE 051

Note Title

25/11/2025

INTEGRALI PROPRI (Integrale di RIEMANN)

- Come si indicano
- Significato geometrico
- Come si definiscono
- Come si calcolano

1 Notazioni

Ingredienti fondamentali

- ① zona di integrazione $[a, b]$ limitata
 - ② $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata
- se almeno uno manca
l'integrale è improprio

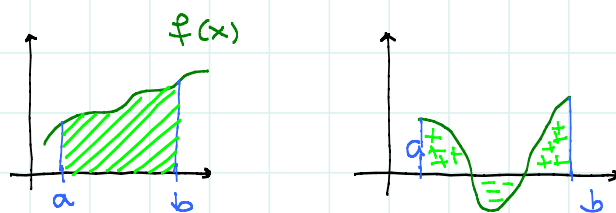
Estensioni della notazione: $\int_D f(x) dx$ $D \subseteq \mathbb{R}$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{estremi uguali})$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{estremi invertiti})$$

Le ultime due sono definizioni per cui in seguito consideriamo solo $a < b$.

2 Significato geometrico



$\int_a^b f(x) dx = \text{area con segno}$ della parte di piano compresa tra asse x e il grafico di f .

Con segno: parti sopra asse x contano con il segno $+$, quelle sotto con il segno $-$.

3 Definizione Si può dare in tanti modi equivalenti

- DARBOUX *avanzata* (questa lezione)
- " *ortodossa*
- RIEMANN

Tre fasi: → caso banale
→ caso semibanale
→ caso generale

Caso banale $f(x) = \lambda \quad \forall x \in [a, b]$
↑
costante



Si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda \underbrace{(b-a)}_{\substack{\text{lunghezza} \\ \text{base}}} = \text{area rettangolo}$$

↑
altezza con segno

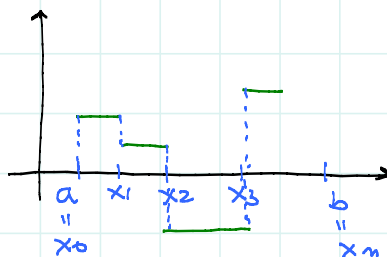
Caso semibanale Esiste una suddivisione di $[a, b]$
 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

ed esistono costanti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

(negli estremi si può decidere a piacere)

In questo caso si pone



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i - x_{i-1}) = \text{somma algebrica delle aree dei vari rettangoli.}$$

Queste funzioni si chiamano

FUNZIONI A GRADINO (STEP FUNCTION)

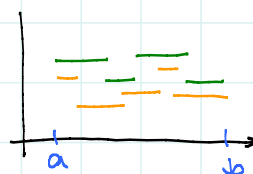
Oss. Una step function è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche di intervalli

La funzione caratteristica di un intervallo vale 1 nell'intervallo e 0 fuori (agli estremi si può decidere)

Lemma non ovvio

- ① Se due comb. lineari di caratt. danno la stessa step function, allora l'integrale è lo stesso.
- ② Se una step function è $\geq$ di un'altra per ogni $x \in [a, b]$, allora il suo integrale è $\geq$ dell'altro

[Sotto a tutto serve un sotto-lemma che dice che due step function si possono sempre definire a partire dalla stessa partizione]



Caso generale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata qualunque
Si definisce

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \psi \text{ è una step funt.} \right. \\ \left. \psi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

↙ somme superiori

↑ integrale superiore

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \psi(x) dx : \psi \text{ è una step funt.} \right. \\ \left. \psi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \right\}$$

↙ somme inferiori

↑ integrale inferiore



Lemma $I^-(f) \leq I^+(f)$

Dim tutte le somme inferiori sono $\leq$ tutte le somme superiori

Def. Se per caso $I^-(f) = I^+(f)$, allora si dice che f è integrabile (secondo RIEMANN) in $[a, b]$ e il valore comune è indicato con

$$\int_a^b f(x) dx$$

Oss. L'ipotesi che f è limitata garantisce l'esistenza di step $f \geq$ e $\leq$.

Esempio in cui $I^- < I^+$ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

In questo caso $I^+ = 1$ e $I^- = 0$

FUNZIONE DI
DIRICHLET.

ANALISI 1 - LEZIONE 52

Note Title

25/11/2025

Auerebbe dimostrato che l'integrale definito come $I^-(f) = I^+(f)$ coincide con quello che ci aspettavamo per funzioni costanti e step.f.

Teorema misterioso

Almeno le seguenti funzioni sono integrabili

→ quelle monotone → ora

→ quelle continue → secondo semestre

→ quelle continue tranne un numero finito di p.ti → esercizio

Criterio di integrabilità $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due step funct.

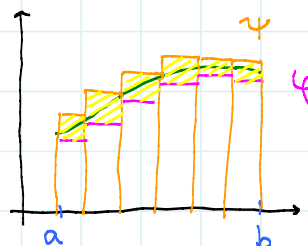
$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

tali che

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$

[Posso sempre supporre φ e ψ ottenute dalla stessa partizione di $[a, b]$]

Moralmente: area tra φ e ψ è $\leq \varepsilon$.



Dim. criterio: quasi ovvia.

Segue dalla caratterizzazione di $\inf$ e $\sup$

Più in generale, dati due insiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ con

$$a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

allora $\sup A = \inf B$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad \exists b \in B \quad \text{t.c.} \quad b - a < \varepsilon.$$

A B

Dim (che le f monotone sono integrabili)

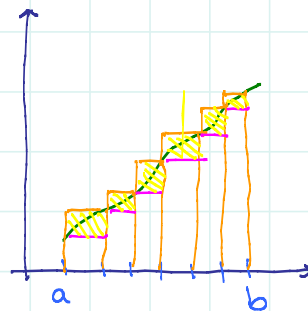
Facciamo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ debolm. cresc.

(l'altro caso è analogo).

Dividiamo $[a, b]$ in n parti uguali

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$



Definisco $\psi(x) = f(x_i) \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

$\varphi(x) = f(x_{i-1}) \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

Per deb. cresc.

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Ora

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n} \right) (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &\quad \uparrow \text{base} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \quad \leftarrow \text{Questa è} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \quad \text{telescopica} \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basta prendere n grande e diventa $\leq \varepsilon$.

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI INTEGRABILI

- ① Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono integrabili, allora $f+g$ è integrabile e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Dim Per il criterio di integrabilità esistono s.f. tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \psi_1(x) \\ \forall x \in [a, b]$$

$$\varphi_2(x) \leq g(x) \leq \psi_2(x) \\ \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b (\psi_1(x) - \varphi_1(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b (\psi_2(x) - \varphi_2(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora basta osservare che

$$\underbrace{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}_{\varphi_3(x)} \leq f(x) + g(x) \leq \underbrace{\psi_1(x) + \psi_2(x)}_{\psi_3(x)} \\ \forall x \in [a, b]$$

$$e \quad \int_a^b (\psi_3(x) - \varphi_3(x)) dx = \int_a^b [(\psi_2(x) - \varphi_2(x)) + (\psi_1(x) - \varphi_1(x))] dx$$

Qui sto usando la
tesi di Weierstrass
per step functions
per le quali è più
semplice da dimostrare

$$\Rightarrow \int_a^b (\psi_2(x) - \varphi_2(x)) dx + \int_a^b (\psi_1(x) - \varphi_1(x)) dx \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

② Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora
 λf è integrabile e

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Dim Ancora criterio di integrabilità (occhio ai λ negativi)

① + ② L'insieme delle funzioni integrabili in $[a, b]$ è uno
sp. vett. e l'integrale è un'applic. lin. da questo
spazio in $\mathbb{R}$.

③ (Monotonia dell'integrale) Se f e g sono int. in $[a, b]$ e
 $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

[Basta considerare le
somme superiori]

Oss. (wokista) Cosa si salva di ①, ②, ③ senza assumere l'integrabilità

④ (Int. e valore assoluto) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, allora $|f|$ è integrabile e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

È unica di $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

Morale: al RHS tutte le aree contano con il +, al LHS c'è una somma algebrica

Oss. Se $|f|$ è integrabile, possiamo dire che f è integrabile?

NO! $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ in ogni $[a, b]$

⑤ (Prodotto) Se f e g sono integrabili, allora $f \cdot g$ è integr. ma in generale

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Domanda: cosa si può dire quando sono uguali?

Dim. delicata per la gestione dei segni

⑥ (Proprietà di reticolo) Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

Dim. $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$

— 0 — 0 —

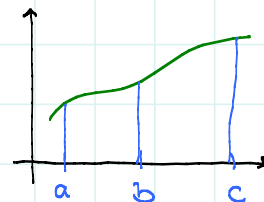
ANALISI 1 - LEZIONE 053

Note Title

26/11/2025

Additività rispetto alla zona di integrazione

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



Siano $a < b < c$ e sia $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

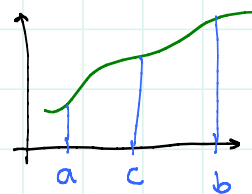
Supponiamo che f sia integrabile in $[a, b]$ e in $[b, c]$.

Allora f è integrabile in $[a, c]$ e vale la formula di sopra.

Oss. Un enunciato analogo vale anche se $a < c < b$

Il punto fondamentale è che ora

$$\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx$$



Vale in realtà per ogni ordinamento di a, b, c .

Idea della dim. Prendo step. f. sopra e sotto in $[a, b]$ e $[b, c]$ e le riunisco per avere quelle in $[a, c]$.

Idea per dim. alternativa: si definisce l'integrale solo per funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ purché

- limitata
- nulle fuori da un intervallo.

A quel p.to

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) dx$$

↑ f estesa a 0 fuori di $[a, b]$

A quel p.to l'additività rispetto alla zona di integrazione segue dall'additività semplice.

Domanda / esercizio : cosa diventa la proprietà senza assumere l'integrabilità.

COME SI CALCOLANO

Setting : data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, voglio calcolare

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Procedura Cerco UNA funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in $[a, b]$ e vale

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

(basta F continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b))

A quel pto

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

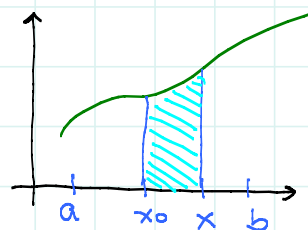
Ogni F con questa proprietà si dice PRIMITIVA di $f(x)$ (ANTIDERIVATIVE in inglese).

Def. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Fisso $x_0 \in [a, b]$.

Si dice funzione integrale la funzione definita da

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$$

↑ ↑
usare un
nome diverso
da x



Proprietà semplici della funzione integrale

① $F(x_0) = 0$

② Se $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, allora F è M -lipschitziana, e quindi in particolare continua, cioè

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq M |x_2 - x_1| \quad \forall x_1 \in [a, b] \quad \forall x_2 \in [a, b]$$

Dim Assumiamo wlog che $x_1 \leq x_2$. Allora

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &\quad \uparrow \\ &\text{additività zona integr.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \\ &\stackrel{\text{val. assoluto}}{\leq} \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \\ &\stackrel{\text{monotonia dell' integrale}}{\leq} \int_{x_1}^{x_2} M dx \\ &\stackrel{\text{caso banale}}{=} M(x_2 - x_1) \\ &\stackrel{x_2 \geq x_1}{=} M |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

③ Per ogni intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ vale la formula

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

Dim $\int_c^d f(x) dx = \int_{x_0}^d f(x) dx - \int_{x_0}^c f(x) dx$ additività risp. alla zona di integr.

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora per ogni scelta di x_0 la funzione integrale F è derivabile e soddisfa

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

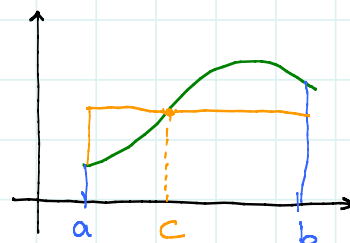
Teorema (della media integrale)

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esiste $c \in [a, b]$ t.c.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Interpretazione geometrica Possiamo scriverlo come

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\substack{\uparrow \\ \text{area sotto il} \\ \text{grafico}}} = \underbrace{f(c)(b-a)}_{\substack{\uparrow \\ \text{area di un} \\ \text{rettangolo con} \\ \text{base } [a, b] \text{ e} \\ \text{altezza } c}}$$



Dim Per w. f ammette in $[a, b]$ un minimo m e un massimo M , cioè

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Per monotonia dell'integrale

$$\underbrace{\int_a^b m dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b M dx}_{M(b-a)}$$

Dividendo per $b-a$ trovo

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\lambda} \leq M$$

" λ = numero compreso
tra min e max

[Fin qui andava bene
anche senza continuità
usando $m = \inf$
e $M = \sup$]

Essendo f continua, per forza assume tutti i valori tra m e M .
— o — o —

Oss. Con il senso di poi il teo. della media integrale
è Lagrange applicato a F .
— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 054

Note Title

26/11/2025

Dim. teo. fondamentale Prendiamo una funzione integrale

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Prendiamo $x_1 \in (a, b)$ e proviamo a calcolare $F'(x_1)$.

Per $R > 0$ piccolo a sufficienza

$$\frac{F(x_1+R) - F(x_1)}{R} = \frac{1}{R} \left\{ \int_{x_0}^{x_1+R} f(t) dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt \right\}$$

add. zona integr. $\rightarrow$

$$= \frac{1}{R} \int_{x_1}^{x_1+R} f(t) dt$$

$\uparrow$ lung. intervallo su cui integro

teo. media integrale $\rightarrow$

$$= f(c(R))$$

$\uparrow$ p.to misterioso compreso tra x_1 e x_1+R

Quando $R \rightarrow 0$ abbiamo che

$c(R) \rightarrow x_1$ per carabinieri,

quindi per continuità

$$f(c(R)) \rightarrow f(x_1)$$

cioè

$$F'(x_1) = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{F(x_1+R) - F(x_1)}{R} = f(x_1).$$

Per $R < 0$ quando arrivo a

$$\frac{1}{R} \int_{x_1}^{x_1+R} f(t) dt$$

ho estremi invertiti e $R < 0$, quindi i due segni - si annullano e posso continuare con il teo. della media integrale.

- 0 - 0 -

Oss. Se $x_1 \in \{a, b\}$, allora abbiamo solo $R \rightarrow 0^+$ o $R \rightarrow 0^-$.

1 - se usiamo una qualunque funzione integrale, allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (*)$$

2 - tutte le funzioni integrali sono primitive, cioè $F' = f$

Resta il dubbio che esistano primitive per cui non vale (*).

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

(cioè due qualunque primitive IN UN INTERVALLO differiscono per una costante)

dunque in particolare

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) - F_2(a).$$

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

e quindi $G(x)$ è costante. Perché?

Lagrange!

range:

$$G(x) - G(a) = (x-a) G'(c) = 0$$

↑
compresso tra
 $a \in x$

Quindi $G(x) = G(a)$ per ogni $x \in [a, b]$.

A questo punto

$$F_1(b) - F_1(a) = F_2(b) + \cancel{c} - (F_2(a) + \cancel{c}) = F_2(b) - F_2(a)$$

Tecniche di integrazione : data f , trovare una qualunque F con $F' = f$.

Così banali: leggere al contrario la tabellina delle derivate.

Notazione $\int f(x) dx$ = una qualunque primitiva di f
 $\uparrow$
 integrale senza
 estremi

Esempi $\int x dx = \frac{1}{2} x^2$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x \quad \text{per } x > 0$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \int \cos x dx = \sin x \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

Discorso del +c Mania strana

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$
 rappresenta l'insieme
 di tutte le primitive di
 $f(x) = x$ in $\mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c \quad \leftarrow \text{Questo non è l'insieme di tutte le funzioni } +c. F'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

In questo secondo caso posso usare 2 valori di c diversi per $x > 0$ e per $x < 0$

Morale: $\rightarrow$ il $+c$ non serve nel calcolo di $\int_a^b f(x) dx$ perché si semplifica

$\rightarrow$ non basta per descrivere tutte le primitive.

Quindi non serve a molto.

Tesi : $|f|$ integr. in $[a, b]$

$$\hat{\varphi}(x) \leq |f(x)| \leq \hat{\psi}(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 step. funct. step. funct.

$$\int_a^b (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx \leq \varepsilon.$$
$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]$$
$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Suppongo wlog che φ e ψ arrivino da una stessa partizione di $[a, b]$
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b.$

→ se $f(x) \geq 0$ sempre, allora uso $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ e $\hat{\psi}(x) = \psi(x)$
e allora gratis

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

→ Se $f(x)$ cambia segno in (x_{i-1}, x_i) , osservo che $\varphi(x) \leq 0$ e $\varphi(x) \geq 0$ nell'intervallo epongo

$$\hat{\varphi}(x) = 0$$

e osservo che

$$\hat{\psi}(x) = \max \{ \psi(x), |\varphi(x)| \}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{\max \{ \psi(x), |\varphi(x)| \}}_{\geq 0} dx$$

$$\max \{ A, B \} \leq A + B$$

se $A \geq 0$ e $B \geq 0$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) + |\varphi(x)|) dx$$

$$\underbrace{|\varphi| = -\varphi}_{\text{essendo } \leq 0} \rightarrow = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

Quindi in ogni intervallo vale che

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\hat{\psi}(x) - \hat{\varphi}(x)) dx \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\psi(x) - \varphi(x)) dx$$

Quando sommo ottengo la tesi.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 055

Note Title

01/12/2025

Domanda : data $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, come trovo $\overset{\text{UNA primitiva}}{F}: D \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.
 $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$

Tecniche di integrazione :

- primitive elementari (tabella di derivate al contrario)
- int. per parti
- int. per sostituzione
- int. funzioni razionali
- sostituzioni razionalizzanti.

Base di tutto : se $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 e $\varphi = \Phi'$, allora

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(x)]_a^b$$

INTEGRAZIONE PER PARTI Siano $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Poniamo

$$\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$$

Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) \quad \text{deriv. prodotto}$$

Applichiamo la base di tutto

$$\int_a^b (f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x)) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b$$

e quindi, riorganizzando,

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x) dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx$$

Formula di int. per parti UFFICIALE

Più brevemente

$$\boxed{\int f G = F G - \int F g} \quad \text{Formula int. per parti} \\ \text{ABUSIVA}$$

Operativamente: $\rightarrow$ cerco di vedere la φ da integrare come prodotto di due funzioni f e G

$\rightarrow$ di f devo saper fare la primitiva

$\rightarrow$ di G spero che derivando migliori.

Esempio 1

$$\int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{e^{2x}} dx = \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{1}{2} e^{2x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \rightarrow \text{fare sempre la verifica}$$

Esempio 2

$$\int \underset{G}{x^2} \cos(\underset{f}{3x}) dx = \underset{G}{x^2} \underset{F}{\frac{1}{3} \sin(3x)} - \int \underset{g}{2x} \cdot \underset{F}{\frac{1}{3} \sin(3x)} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{2}{3} \int \underset{G}{x} \cdot \underset{f}{\sin(3x)} dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) - \frac{2}{3} \left\{ \underset{G}{x} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) - \int \underset{g}{1} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) + \frac{2}{9} x \cos(3x) - \frac{2}{9} \int \cos(3x) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \sin(3x) + \frac{2}{9} x \cos(3x) - \frac{2}{27} \sin(3x) \leftarrow \text{verifica}$$

FATTO GENERALE Così si fanno le primitive del tipo

$$\int p(x) \cdot e^{ax} dx$$

$$\int p(x) \cos(ax) dx$$

$$\int p(x) \sin(ax) dx$$

con $p(x)$ polinomio

Utilizzi SMART dell'integrazione per parti:

→ grande ritorno

→ l'1 nascosto

$$\text{Esempio 3} \quad \int \underbrace{\cos x}_{\neq G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad G} dx = \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad G} - \int \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{2e^{2x}}_{g} dx$$

$$= \sin x \cdot e^{2x} - 2 \int \underbrace{\sin x}_{\neq G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad g} dx$$

$\rightarrow$ toro isolotto ÷

$$= \sin x \cdot e^{2x} - 2 \left\{ \underbrace{-\cos x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{F \quad G} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{F \quad G} \cdot \underbrace{2e^{2x}}_{g} dx \right\}$$

$$= \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x} - 4 \int \cos x \cdot e^{2x} dx$$

grande ritorno!

Portando a sx il ritornato, troviamo

$$5 \int \cos x \cdot e^{2x} dx = \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x}$$

Dividendo per 5 ho la primitiva voluta!

$$\text{Esempio 4} \quad \int \cos^3 x dx$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \underbrace{\cos x}_{\neq G} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{G} dx = \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{F \quad G} - \int \underbrace{\sin x}_{F \quad G} \cdot \underbrace{2 \cos x}_{F \quad g} (-\sin x) dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x dx - 2 \int \cos^3 x dx$$

$\rightarrow$ grande ritorno!

Portando a sx:

$$3 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x$$

e dividendo per 3 ho finito.

Esempio 5 $\int \log x \, dx$

$$\int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log x} \, dx = \underset{F}{x} \log x - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x \quad \leftarrow \text{verifica}$$

Esempio 6 $\int \arctan x \, dx$

$$\int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} \, dx = \underset{F}{x} \cdot \underset{G}{\arctan x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \quad \leftarrow \text{verifica!}$$

FATTO GENERALE Le funzioni $\log$ e $\arctan$ tendono a "migliorare" quando si derivano.

FATTO GENERALE Come l'esempio 3 si fanno le primitive di

$$\int \cos(ax) \cdot e^{bx} \, dx$$

$$\int \sin(ax) \cdot e^{bx} \, dx$$

(se la base è diversa da e non cambia nulla)

IL NON ESEMPIO

$$\int \tan x \, dx$$

$$\int \tan x \, dx = \int \underset{f}{\sin x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} \, dx$$

$$= \underset{F}{-\cos x} \cdot \underset{G}{\frac{1}{\cos x}} - \int \underset{F}{(-\cos x)} \left(\underset{g}{-\frac{1}{\cos^2 x}} \right) (-\sin x) \, dx$$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \tan x \, dx$$

Periamo ritorno!

Semplificando viene $0 = -1$!!

Oss. Questo succede quando si usano le formule abusive.
Con gli estremi verrebbe

$$[0]_a^b = [-1]_a^b \quad \text{che è vera !!}$$

Esempio ancora più evidente:

$$\int 1 \, dx = \int \underset{f}{e^x} \cdot \underset{G}{e^{-x}} \, dx = \underset{F \cdot G}{e^x \cdot e^{-x}} - \int \underset{F \cdot g}{e^x (-e^{-x})} \, dx$$

$$= 1 + \int 1 \, dx$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 056

Note Title

01/12/2025

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE Ripartiamo dalla base di tutto

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Poniamo $\Phi(x) = F(G(x))$ (estremamente impreciso: dovrei mettere ipotesi su F e G)

Osserviamo che

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = f(G(x)) \cdot g(x) \quad (\text{solito } F' = f, G' = g)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_a^b f(G(x)) \cdot g(x) dx &= F(G(b)) - F(G(a)) \\ &= \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Formula int. per sostituzione **SEMI-UFFICIALE**

Oss. Se uno guarda LHS e RHS non sembrano esserci ipotesi su f , nemmeno la continuità.

Interpretazione **BRUTAL MODE**

→ Devo calcolare $\int_a^b f(G(x)) g(x) dx$

→ Pongo $y = G(x)$

→ Quando $x = a \rightsquigarrow y = G(a)$, quando $x = b \rightsquigarrow y = G(b)$

→ $\frac{dy}{dx} = G'(x) = g(x) \rightsquigarrow dy = g(x) dx$

In questo modo

$$\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

che è la formula ottenuta sopra rigorosamente.

Esempio 1 $\int x^8 \cdot \sin(x^9) dx$

Idea: pongo $y = x^9 \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = 9x^8 \rightsquigarrow dy = 9x^8 dx$

$$\frac{1}{9} \int \underbrace{\sin(x^9)}_{\sin y} \cdot \underbrace{9x^8 dx}_{dy} = \frac{1}{9} \int \sin y dy = -\frac{1}{9} \cos y = -\frac{1}{9} \cos(x^9)$$

↑
verifica :)

Esempio 2 $\int x \cdot e^{-x^2} dx$

Pongo $y = x^2 \rightsquigarrow dy = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{e^{-x^2}}_{e^{-y}} \cdot \underbrace{2x dx}_{dy} = \frac{1}{2} \int e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Esempio 3 $\int \frac{\log x}{x} dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \rightsquigarrow dy = \frac{dx}{x}$

$$\int \log x \cdot \frac{1}{x} dx = \int y dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \log^2 x$$

Esempio 4 $\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\log x}_{G} dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F} \underbrace{\log x}_{G} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2$$

Si poteva fare per sostituzione?

$$y = \log x \rightsquigarrow dy = \frac{1}{x} dx \quad \text{quindi}$$

$$\int x \log x \, dx = \int \underbrace{x^2}_{e^{2y}} \cdot \underbrace{\log x}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int y e^{2y} dy$$

da qui procedo per parti

Esempio 5 $\int \tan x \, dx$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \text{Pongo } y = \cos x \rightsquigarrow dy = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\frac{1}{y}} \cdot \underbrace{(-\sin x) dx}_{dy} = - \int \frac{1}{y} dy$$

$$= -\log |y| = -\log |\cos x|$$

o volendo

$$\int \tan x \, dx = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Entrambe le funzioni sono definite per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\cos x \neq 0$)

Esempio 6 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}$

↑
metà dell'area del
cerchio



Facciamo comunque UNA primitiva

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad \text{Pongo } x = \sin y \rightsquigarrow dx = \cos y \, dy$$

quindi

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y \, dy = \int \cos^2 y \, dy$$

Ora quest'ultimo lo facciamo con il grande ritorno:

$$\int \cos^2 y \, dy = \int \underset{\neq}{\cos y} \cdot \underset{G}{\cos y} \, dy = \underset{F}{\sin y} \cos y - \int \underset{F}{\sin y} \underset{g}{(-\sin y)} \, dy$$

$$= \sin y \cos y + \int \underset{1-\cos^2 y}{\sin^2 y} \, dy = \sin y \cos y + y - \int \cos^2 y \, dy$$

↑
grande ritorno

da cui

$$\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} \sin y \cos y + \frac{1}{2} y$$

Tornando in x :

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \underbrace{\cos(\arcsin x)}_{= \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

In conclusione

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$$

Una verifica è il condono di tutti i passaggi "strani" fatti.

PRIMITIVE DI POTENZE DI $\sin x$ E $\cos x$

1° modo Con il grande ritorno il grado scende di due

$$\int \cos^{2025} x \, dx = \int \underset{\neq}{\cos x} \cdot \underset{G}{(\cos x)^{2024}} \, dx$$

$$= \sin x \cdot (\cos x)^{2024} - \int \sin x \cdot 2024 (\cos x)^{2023} (-\sin x) \, dx$$

$$= \sin x (\cos x)^{2024} + 2024 \int (\cos x)^{2023} (1 - \cos^2 x) \, dx$$

grande ritorno

ANALISI 1 - LEZIONE 057

Note Title

02/12/2025

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P e Q in $\mathbb{R}[x]$

wlog possiamo supporre $Q(x)$ monico

Teorema Ogni funzione razionale ammette una primitiva che è comb. lin. di funzioni razionali e nda del tipo $\log(ax^2+bx+c)$ e $\arctan(ax+b)$.

Procedura: ① Divisione

② Fattorizzazione ← collo di bottiglia

③ Decomposizione

④ Integrazione

① **DIVISIONE** Se $\deg(P) < \deg(Q)$ non c'è nulla da fare
Se $\deg(P) \geq \deg(Q)$, allora faccio la div. di pol.

$$P(x) = A(x) \cdot Q(x) + \underbrace{R(x)}_{\uparrow \deg(R) < \deg(Q)}$$

Da qui segue

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$\uparrow$ di questo so fare la primitiva $\uparrow$ Nuova funz. raz. con $\deg(R) < \deg(Q)$

Conclusione: basta saper fare la primitiva quando $\deg(\text{num}) < \deg(\text{den.})$

2 FATTORIZZAZIONE Scomporgo il denominatore $Q(x)$.

Fatto generale: ogni polinomio a coeff. reali si può scrivere come prodotto di polinomi a coeff. reali di grado 1 o 2 (con quelli di grado 2 non ulteriormente scomponibili). Alcuni fattori possono essere ripetuti in molteplicità.

Al termine della fase 2 abbiamo

$$Q(x) = \prod_{i=1}^k (x + a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^R (x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{n_j}$$

$\uparrow$
 corrispondono
 alle radici $-a_i$
 di $Q(x)$ che
 sono reali

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 polinomio che ha
 radici $\alpha_j \pm i\beta_j$

3 DECOMPOSIZIONE Si scrive la funzione razionale come comb. di funzioni razionali più semplici

Due metodi: $\rightarrow$ decomposizione in fratti semplici
 $\rightarrow$ decomposizione di HERMITE $\leftarrow$ più comoda

Fratti semplici Caso base: tutti i fattori di $Q(x)$ hanno molteplicità 1

$$\frac{x^3 + x + 7}{(x+1)(x-2)(x^2+3x+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+9}$$

Sopra i fattori di grado 1 $\leadsto$ costante

" 2 $\leadsto$ generico pol. di grado 1

Facendo i conti ottengo

$$x^3 + x + 7 = \underbrace{A(x-2)(x^2+3x+9) + B(x+1)(x^2+3x+9) + (Cx+D)(x+1)(x-2)}_{\text{pol. di grado 3 cui coeff. dipendono da } A, B, C, D}$$

Uguagliando ho un sistema lin. di 4 eq. in 4 incognite

Quando alcuni fattori hanno molteplicità, allora devo usare come denominatore tutte le potenze fino alla molteplicità

$$\frac{\dots}{(x+1)^3(x^2+5)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+5} + \frac{Fx+G}{(x^2+5)^2}$$

Anche in questo caso $\neq$ incognite, e $\neq$ equazioni (il numeratore ha grado ≤ 6 , quindi $\neq$ coeff.)

Teorema (per ora misterioso) Posso sempre trovare in maniera unica i coeff.

Decomposizione di Hermite Se non ci sono molteplicità, coincide con la precedente.

Se ci sono molteplicità diventa

$$\frac{\dots}{(x+1)^3(x^2+5)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5} + \frac{d}{dx} \frac{Dx^3+Ex^2+Fx+G}{(x+1)^2(x^2+5)}$$

$\uparrow$
 tutti i fattori usati solo una volta

$\uparrow$
 generico pol. con grado $\leq$ in meno risp. al denom.
 stessi fattori di $Q(x)$, con molteplicità diminuita di 1

Fatto misterioso: si trovano i coeff. in maniera unica

4 INTEGRAZIONE Basta integrare i fratti semplici

$$\int \frac{A}{x+a} dx = A \log |x+a|$$

$$\int \frac{A}{(x+a)^m} dx = \frac{A}{1-m} \frac{1}{(x+a)^{m-1}}$$

Vediamo i fratti con denom. di grado 2

$$\int \frac{3x+7}{x^2+1} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+1} dx + 7 \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+1) + 7 \arctan x$$

$$\int \frac{3x+7}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{4}{x^2+2x+2} dx$$

"
 $1+(x+1)^2$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) + 4 \arctan(x+1)$$

Caso generale:

$$\frac{Ax+B}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = \frac{A}{2} \frac{2x-2\alpha}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} + \frac{B+\alpha A}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2}$$

↓

$$\frac{A}{2} \log(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)$$

$$\frac{1}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2 + (x-\alpha)^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$$

↓ primitiva

$$\frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

Esempi $\int \frac{x}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2+2)$ [$\frac{1}{2}$ aggiunto dopo video]

$$\int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Più in generale $\int \frac{1}{x^2+a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$ se $a > 0$

Resterebbero da fare i fratti con denom. di grado 2 e molteplicità (che con Hermite non servono :)).

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 058

Note Title

02/12/2025

Fattorizzazione di pol. reali

Step 1 Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ di grado ≥ 1 ha almeno una radice $\alpha \in \mathbb{C}$

Non dim Teo fondamentale dell'algebra

Step 2 Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[x]$ di grado $d \geq 1$ è il prodotto di d polinomi di grado 1

Dim Teo. Ruffini + induzione dallo Step 1

Step 3 Se $P \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora $\bar{\alpha}$ è una radice

Dim $P(\alpha) = 0 \leadsto$ faccio il coniugato e i coeff. di P non cambiano

Step 4 Se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $P \in \mathbb{R}[x]$ con mult. m , allora anche $\bar{\alpha}$ ha mult. m

Dim $P(x) = (x - \alpha)^m Q(x)$
 $\uparrow$
 coeff. in $\mathbb{C}$

Faccio il coniugato $\bar{P}(x) = (x - \bar{\alpha})^m \bar{Q}(x)$

Questo dice che $\bar{\alpha}$ ha mult. $\geq m$. Poi scambio il ruolo di α e $\bar{\alpha}$.

Step 5 Fattorizz. reale

Dim Prendo la fattorizz. complessa e accoppio i termini $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ quando α non è reale.

Decomposizione in fratti semplici

Analogo aritmetico: ogni frazione è somma di frazioni i cui denominatori sono potenze di primi

Lemma Se $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, con Q_1 e Q_2 relativamente primi, cioè senza fattori in comune, allora

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

per opportuni P_1 e P_2

Dim. BEZOUT vale in $\mathbb{R}[x]$ che è un anello euclideo.

Allora esistono $M(x)$ ed $N(x)$ t.c.

$$1 = M(x) \cdot Q_1(x) + N(x) \cdot Q_2(x)$$

Ora diviso per $Q_1 \cdot Q_2$.

Per induzione sul numero di fattori vale la stessa cosa anche quando il denom. ha più fattori.

Oss. Dal lemma ottengo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P(x) \cdot P_2(x)}{Q_2(x)}$$

In generale i gradi del numeratore possono superare quelli del denominatore. Faccio la divisione e ho problema.

Tuttavia se $\deg P < \deg Q$ posso trovare una sol. in cui i gradi dei num sono $<$ gradi del denom.

Dopo la divisione avrai

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{R_2(x)}{Q_2(x)} + \underbrace{\frac{A_1(x) + A_2(x)}{Q(x)}}_{\substack{\downarrow \text{polinomio che tende} \\ \text{a 0 all'infinito} \therefore \\ \text{Quindi è il pol. nullo}}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$

Usando il lemma, otteniamo una decomposizione i cui denominatori sono potenze di pol. di 1° o 2° grado

$$\frac{1}{(x+1)^{30}(x^2+5)^{20}} = \frac{P_1(x)}{(x+1)^{30}} + \frac{P_2(x)}{(x^2+5)^{20}}$$

Perché $\frac{P_1(x)}{(x+1)^{30}}$ è somma di fratti semplici?

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{29}x^{29} \sim 1, x, x^2, \dots, x^{29} \text{ sono una base di } \mathbb{R}_{\leq 29}[x]$$

Ma anche $1, (x+1), (x+1)^2, \dots, (x+1)^{29}$ sono una base (sono in numero giusto e lin. indep.)

Ma allora

$$P_1(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)^2 + \dots + c_{29}(x+1)^{29}$$

e quando divido per $(x+1)^{30}$ ho finito.

Il caso con il denom. di grado 2 è analogo.

Esempio $\int \frac{1}{x^2+2x-3} dx$

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$$

Decomposizione: $\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$

Bonino: $1 = A(x-1) + B(x+3) = (A+B)x + (3B-A)$

$$\begin{cases} A+B=0 & \text{coeff. } x \\ -A+3B=1 & \text{termine noto} \end{cases} \quad \text{Sommo: } 4B=1 \leadsto B=\frac{1}{4} \leadsto A=-\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \int \frac{1}{x^2+2x-3} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -\frac{1}{4} \log|x+3| + \frac{1}{4} \log|x-1| \end{aligned}$$

Più arduo Moltiplico la relazione per $x+3$

$$\frac{\cancel{x+3}}{(\cancel{x+3})(x-1)} = A + \frac{B(x+3)}{x-1}$$

Sostituisco $x = -3$ e trovo $A = -\frac{1}{4}$

Se voglio B , moltip. per $x-1$ e sostituisco $x=1$

Oss. Con i fattori di secondo grado il metodo arduo funziona sostituendo le due radici complesse.

Esempio $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$

Posso farlo alla Hermite $\frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \frac{Cx+Dx+Ex^2+Fx^3}{(x^2+1)^2}$

Alternativa:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx &= \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^3} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx \\ &\quad \parallel \\ &\quad \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx = \int \underset{G}{x} \cdot \underset{F}{\frac{x}{(x^2+1)^3}} dx = \underset{G}{x} \left(\underset{F}{-\frac{1}{4(x^2+1)^2}} \right) + \frac{1}{4} \int \underset{G}{\frac{1}{(x^2+1)^2}} \underset{F}{dx}$$

e quindi ci si riduce al grado precedente.

Esempio $\int \frac{x^2}{x^4+1} dx$

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 059

Note Title

03/12/2025

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Come trasformare integrali di funzioni "strane" in int. di funzioni razionali

Quattro scenari : ① Raz (e^x)

② Raz ($x, \sqrt{ax+b}$) Raz ($x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$)

③ Raz ($x, \sqrt{ax^2+bx+c}$)

④ Raz ($\sin x, \cos x$)

Esempio 1 (Scenario 1) $\int \frac{1}{e^x+2} dx$

Pongo $y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x+2} dx = \int \frac{1}{e^x+2} \underbrace{\frac{1}{e^x} \cdot e^x dx}_{\frac{1}{y+2} \cdot \frac{1}{y} dy} = \int \frac{1}{y(y+2)} dy = \text{si fa}$$

$$\frac{1}{y(y+2)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2}$$

Molt. per y e $y=0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Molt. per $y+2$ e $y=-2 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{1}{y(y+2)} dy = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy - \frac{1}{2} \int \frac{1}{y+2} dy = \frac{1}{2} \log |y| - \frac{1}{2} \log |y+2|$$

Torno in x e ottengo $\int \frac{1}{e^x+2} dx = \frac{1}{2} \log(e^x) - \frac{1}{2} \log(e^x+2)$

↑
positivi, quindi inutile

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \log(e^x+2)$$

↳ Verifica

Alternativa per il cambio: $y = e^x \rightsquigarrow x = \log y \rightsquigarrow dx = \frac{1}{y} dy$

$$\int \frac{1}{e^x+2} dx = \int \frac{1}{y+2} \frac{1}{y} dy = \text{come prima}$$

Esempio 2 (Scenario 1) $\int \frac{8^x}{4^x+1} dx$

Pongo $y = 2^x \rightsquigarrow dy = 2^x \cdot \log 2 \cdot dx$

$$\int \frac{8^x}{4^x+1} dx = \int \underbrace{\frac{4^x}{4^x+1}}_{\frac{y^2}{y^2+1}} \frac{1}{\log 2} \cdot \underbrace{\log 2 \cdot 2^x dx}_{dy}$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2}{y^2+1} dy \quad \begin{matrix} \uparrow \\ +1-1 \\ \text{al num} \end{matrix} = \frac{1}{\log 2} \int \left(1 - \frac{1}{y^2+1}\right) dy$$

$$= \frac{1}{\log 2} (y - \arctan y) = \frac{1}{\log 2} (2^x - \arctan(2^x))$$

Esempio 3 (Scenario 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+3} dx$ Raz ($x, \sqrt{x+1}$)

Pongo $y = \sqrt{x+1} \rightsquigarrow y^2 = x+1 \rightsquigarrow x = y^2-1 \rightsquigarrow dx = 2y dy$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+3} dx = \int \frac{y}{y^2+2} \cdot 2y dy = \text{si fa}$$

Esempio 4 $\int \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx$ Poteva essere $\int \frac{x^2 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}{2 + \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}} dx$

Pongo $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} \rightsquigarrow y^2 = \frac{x+1}{x+3} \rightsquigarrow \boxed{y^2x + 3y^2 = x+1}$

$$\rightsquigarrow x(y^2-1) = 1-3y^2 \rightsquigarrow x = \frac{1-3y^2}{y^2-1}$$

$\uparrow$ eq. di primo grado in x

$$\rightsquigarrow dx = \left(\frac{1-3y^2}{y^2-1} \right)' dy$$

Quindi

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} dx = \int \underset{G}{y} \left(\underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} \right)' dy =$$

$$= \underset{G}{y} \cdot \underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} - \int \underset{G}{4} \cdot \underset{F}{\frac{1-3y^2}{y^2-1}} dy = \text{si fa}$$

Esempio 5 (Scenario 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$ Radici diverse della stessa roba

Pongo $y = \sqrt[6]{x}$ (in generale uso minimo comune multiplo)

$$\leadsto x = y^6 \leadsto dx = 6y^5 dy$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{y^3}{y^2+1} \cdot 6y^5 dy = \text{si fa}$$

Esempio 6 (Scenario 3) $\int \sqrt{x^2+3x+4} dx$

Pongo $\sqrt{x^2+3x+4} = x+y \leadsto \boxed{x^2+3x+4 = \cancel{x^2} + 2xy + y^2}$
è di primo grado in x

$$x(2y-3) = 4-y^2 \leadsto x = \frac{4-y^2}{2y-3} \leadsto dx = \left(\frac{4-y^2}{2y-3} \right)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2+3x+4} dx = \int \left(\underset{x}{\frac{4-y^2}{2y-3}} + \underset{+y}{y} \right) \left(\frac{4-y^2}{2y-3} \right)' dy = \text{razionale}$$

Esempio 7 (Scenario 3) $\int \sqrt{2x^2+5} dx$

Pongo $\sqrt{2x^2+5} = \sqrt{2}x+y \leadsto \cancel{2x^2}+5 = \cancel{2x^2} + 2\sqrt{2}xy + y^2$
è di primo grado in x, e quindi concludo

Fatto generale : se abbiamo $\sqrt{ax^2+bx+c}$ si pone $= \sqrt{a}x + y$
e funziona purché $a > 0$

Esempio 8 (Scenario 3) $\int \sqrt{x^2-5x+6} dx$

Potei farlo come prima, ma cerco alternativa.

Osservo che $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$ e pongo

$$\sqrt{x^2-5x+6} = y(x-2) \quad [\text{oppure } y(x-3)]$$

$$\cancel{(x-2)}(x-3) = y^2(x-2)^2 \quad \text{no è di primo grado in } x!$$

$$x(1-y^2) = 3-2y^2 \quad \text{no } x = \frac{3-2y^2}{1-y^2} \quad \text{no } dx = (\dots)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2-5x+6} dx = \int y \underbrace{\left(\frac{3-2y^2}{1-y^2} - 2 \right)}_{y(x-2)} \underbrace{\left(\frac{3-2y^2}{1-y^2} \right)' dy}_{dx} = \text{si fa}$$

Fatto generale Se ax^2+bx+c si fattorizza come $(x-\lambda)(x-\mu)$
allora posso porre

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = y(x-\lambda) \quad \text{oppure } y(x-\mu).$$

Riassunto $\sqrt{ax^2+bx+c}$

	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	1° modo 2° modo	1° modo
$a < 0$	2° modo	☹ ↑ ↑

in questo caso ho $\sqrt{a} < 0$
quindi non ha senso integrare!

3° modo Ogni pd. di secondo grado si può scrivere come

$$d + (ax+b)^2 \rightsquigarrow 1+x^2 \text{ oppure } -1+x^2$$

$$d - (ax+b)^2 \rightsquigarrow 1-x^2 \text{ oppure } -1-x^2$$

Quindi basta saper fare $\sqrt{x^2+1}$ $\sqrt{x^2-1}$ $\sqrt{1-x^2}$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \text{ si fa con } x = \sin y$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \text{ si fa con } x = \sinh y$$

$$= \int \sqrt{1+\sinh^2 x} \cdot \cosh y dy = \int \cosh^2 y dy$$

e questo si fa in almeno 3 modi

→ grande ritorno

→ formula per $\cosh(2y)$

→ usando formula esplicita per $\cosh y$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx \text{ si fa con } x = \cosh y$$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 y - 1} \sinh y dy = \int \sinh^2 y dy = \text{come prima}$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 060

Note Title

03/12/2025

Scenario 4: formule parametriche per $\sin x$ e $\cos x$ (ultima spiaggia: se le conosci le eviti)

Precorso: pongo $t = \tan \frac{x}{2}$ e ho che

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t \leadsto x = 2 \arctan t \leadsto dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Esempio 1 (Scenario 4) $\int \frac{1}{\sin x} dx$

Uso le formule parametriche: $\int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2t}} \frac{2}{1+t^2} dt$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

Alternativa $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx$

Pongo $y = \cos x$ e diventa $-\int \frac{dy}{1-y^2} =$ si fa
(controllare che venga uguale)

Esempio 2 (Ripasso lezione precedente)

Tanti modi per fare $\int \sqrt{x^2-1} dx$

1° modo: $\sqrt{x^2-1} = x+iy$

2° modo: $\sqrt{x^2-1} = y(x+1)$ oppure $\sqrt{x^2-1} = y(x-1)$

3° modo: $x = \cos^2 y$ ~ viene $\int \sin^2 y \, dy$

4° modo: $x = \frac{1}{\cos y}$ (oppure $x = \frac{1}{\sin y}$)

$$\text{Viene } \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy = \int \frac{\sin y}{\cos y} \cdot \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy$$

$$= \int \frac{\sin^2 y}{\cos^3 y} \, dy = \int \frac{\sin^2 y \cos y}{\cos^4 y} \, dy = \int \frac{\sin^2 y}{(1 - \sin^2 y)^2} \cdot \cos y \, dy$$

Pongo $\sin y = t$ e diventa $\int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} \, dt$ che è razionale

[Controllare che venga lo stesso in tutti i modi]

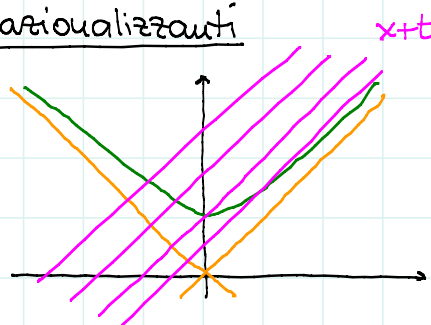
Interpretazione di alcune sostituzioni razionalizzanti

$$\sqrt{x^2+1} = x+t$$

$f(x)$

$$y = \sqrt{x^2+1} \text{ è come dire}$$

$$y^2 = x^2+1 \text{ cioè } y^2 - x^2 = 1$$



Ora $x+t$, al variare di t , è una famiglia di rette // alla bisettrice. Tutte queste rette intersecano una volta sola l'iperbole.

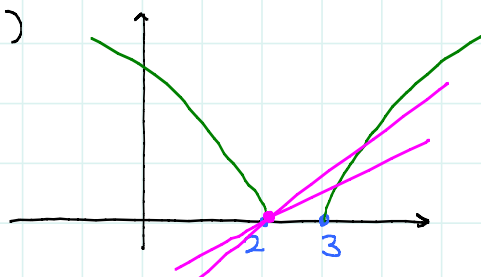
Quindi posso parametrizzare l'iperbole con due funzioni razionali della t

$$\begin{cases} y = x+t \\ y = \sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

Secondo caso: $\sqrt{x^2-5x+6} = t(x-2)$

Il grafico è circa come in figura

$y = t(x-2)$ è la generica retta che passa per $(2,0)$



Ciascuna di queste rette interseca l'iperbole in 2 pt (quando messo a sistema è di 2° grado), ma uno lo conosco perché è $(2,0)$ quindi l'altro sarà per forza razionale come funzione di t (perché il prodotto delle due radici è razionale)

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - 5x + 6 \\ y = t(x-2) \end{cases} \quad t^2(x-2)^2 = x^2 - 5x + 6 \quad \text{ma una radice so essere } x=2.$$

Esempio creativo $\int \sqrt{x^2 + 7x + 1} \, dx$

Vedo che magicamente per $x=1$ viene 3. Quindi il grafico passa per $(1,3)$. Ma allora pongo

$$\sqrt{x^2 + 7x + 1} = \underline{3 + t(x-1)}$$

generica retta per $(1,3)$

$$x^2 + 7x + 1 = 9 + t^2(x-1)^2 + 6t(x-1)$$

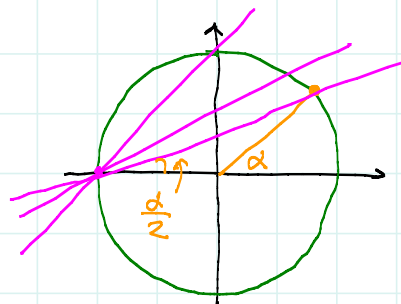
$$x^2 + 7x - 8 = t^2(x-1)^2 + 6t(x-1)$$

" $(x+8)(x-1)$ " $\leadsto$ è di primo grado in x !!

Finestra sul futuro: anche le rette $y = x+t$ passano per uno stesso "punto all'infinito" nel piano proiettivo.

Torniamo alla circonferenza

Di sicuro si parametrizza come $(\cos d, \sin d)$ con $d \in [0, 2\pi]$



Consideriamo tutte le rette che passano per $(-1, 0)$.

Tutte queste intersecano una sola volta la circ. oltre a $(-1, 0)$

Le rette sono $y = t(x+1)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = t(x+1) \end{cases} \rightsquigarrow x^2 + t^2(x+1)^2 - 1 = 0$$

$$\rightsquigarrow (t^2+1)x^2 + 2t^2x + (t^2-1) = 0$$

Una radice è $x = -1$, il prodotto è $\frac{t^2-1}{t^2+1}$, quindi l'altra

radice è $\frac{1-t^2}{1+t^2} \rightsquigarrow$ il corrispondente $y = t(x+1) = \frac{2t}{1+t^2}$

Così abbiamo ottenuto le formule parametriche

Se il p.to P della circ. corrisponde ad un angolo α , il suo t corrispondente è il coeff. ang. della retta per P e $(-1, 0)$ e questo è $\tan \frac{\alpha}{2}$.

Fatto generale Riesco a trovare una sostituzione razionalizzante per $\int f(x) dx$ tutte le volte che riesco a parametrizzare il grafico di f con funzioni razionali di t .

ANALISI 1 - LEZIONE 061

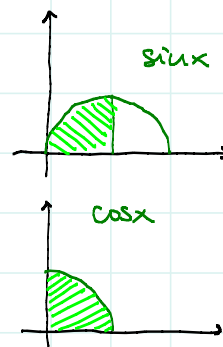
Note Title

09/12/2025

UTILIZZO DELLE SIMMETRIE

Esempio 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$



Come evidenza della simmetria: nel 2° integrale

pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$ $x = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow dx = -dy$

Quando $x = 0$ ho che $y = \frac{\pi}{2}$

" $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$

Quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = 1$$

FATTO GENERALE

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \pm 1$$

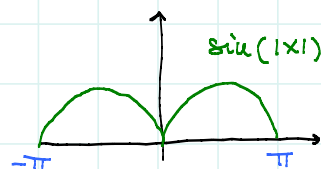
$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \pm 1$$

a seconda di k

Esempio 2 $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(|x|) \, dx = 4$$

↑
funzione pari



$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = -1 \quad \text{sfruttando il fatto generale}$$

Esempio 3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

1° modo: faccio la primitiva (per parti o sfruttando $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$)

2° modo: pongo $C := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$ $S := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

Con il cambio $x = \frac{\pi}{2} - y$ si dimostra come nell'esempio 1 che $C = S$. D'altra parte

$$C + S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

↑
Dough. aten.

Quindi $C = S = \frac{\pi}{4}$.

FATTO GENERALE

$$\int_a^b \cos^2 x \, dx = \int_a^b \sin^2 x \, dx = \frac{b-a}{2}$$

SE a e b sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$

↑ ↑
serve per avere la
simmetria

Esempio 4 $\int_0^{\pi} \sin^2(2025x) \, dx$

Pongo $y = 2025x \rightsquigarrow dx = \frac{1}{2025} dy$

$x=0 \rightsquigarrow y=0$, $x=\pi \rightsquigarrow y=2025\pi$. Quindi

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2025x) \, dx = \int_0^{2025\pi} \sin^2 y \frac{1}{2025} dy = \frac{1}{2025} \int_0^{2025\pi} \sin^2 y \, dy = \frac{\pi}{2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{2025\pi}{2}}$

Stessa cosa se al posto di 2025 c'è $\frac{k}{2}$ con k intero.

Esempio 5 (truccoso)

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 x}{5^x + 1} dx$$

La primitiva mette male ☹

Pongo $x = -y$ da cui $dx = -dy$

$$\underbrace{\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 x}{5^x + 1} dx}_A = \int_{5\pi}^{-5\pi} \frac{\cos^5(-y)}{5^{-y} + 1} (-dy) = \underbrace{\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\cos^5 y}{5^{-y} + 1} dy}_B$$

$$A + B = \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos^5 x \underbrace{\left\{ \frac{1}{5^x + 1} + \frac{1}{5^{-x} + 1} \right\}}_{\frac{1}{a+1} + \frac{1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 1} dx = \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos^5 x dx$$

$$= \int_{-5\pi}^{5\pi} \cos x (1 - \sin^2 x)^2 dx = \int_0^0 (1 - t^2)^2 dt = 0$$

$\uparrow$
 $\sin x = t$
 $dt = \cos x dx$

FATTI GENERALI

Se $f(x)$ è pari, allora $\int_{-A}^0 f(x) dx = \int_0^A f(x) dx$

“ dispari, “ $\int_{-A}^0 f(x) dx = - \int_0^A f(x) dx$

Si dimostrano con la sostituzione $y = -x$, il che però richiede un minimo di ipotesi su f .

In alternativa, possiamo sfruttare la def. di integrale e ottenere

$$I^+(f, [0, A]) = I^+(f, [-A, 0]) \quad \text{e} \quad I^-(f, [0, A]) = I^-(f, [-A, 0])$$

se f è pari

Per f dispari:

$$I^+(f, [0, A]) = -I^-(f, [-A, 0]) \quad \text{e} \quad I^-(f, [0, A]) = -I^+(f, [-A, 0])$$

... caso f pari ... prendo $\psi(x)$ s.f. con $\psi(x) \geq f(x)$ in $[0, A]$.

Allora $\psi(-x)$ è s.f. con $\psi(-x) \geq f(x)$ in $[-A, 0]$ e

l'integrale in $[0, A]$ di $\psi(x)$ coincide con l'integrale in $[-A, 0]$ di $\psi(-x)$.

Esempio 6 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

1° modo : formule parametriche

2° modo : $\frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1-\sin x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \text{dato} &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \tan x - \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

↑ con la sostituzione $\cos x = y$ diventa $\pm \int \frac{dy}{y^2}$

verifica

Esempio 7 $\int \sin(\log x) dx$

Pongo $y = \log x \rightsquigarrow x = e^y \rightsquigarrow dx = e^y dy$

$$\int \sin(\log x) dx = \int e^y \sin(y) dy = \dots \text{grande ritorno}$$

Esempio 8 $\int \arcsin x dx$

1° modo $\int 1 \cdot \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

1° modo $x = \sin y \rightsquigarrow dx = \cos y dy$

$$\int \arcsin x dx = \int \arcsin(\sin y) \cdot \cos y dy = \int y \cos y dy = \dots \text{ parti}$$

Esempio 9 $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

1° modo : parametriche

2° modo : precorso $\int \frac{8}{\sin^3(2x)} dx \dots y = 2x \rightsquigarrow dy = 2dx$

$$\int \frac{4}{\sin^3 y} dy = 4 \int \frac{\sin y}{(1 - \cos^2 y)^2} dy \dots t = \cos y$$

3° modo : $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{1}{\sin^3 x \cos x} + \frac{1}{\sin x \cos^3 x}$

$$\int \frac{\sin x}{\sin^4 x \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{(1 - \cos^2 x)^2 \cos x} dx \quad \cos x = t \dots$$

4° modo $\frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)^2}{\sin^3 x \cos^3 x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{\sin x \cdot \cos x}$

$$2 \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

$$= 2 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

— o — o —

☺

ANALISI 1 - LEZIONE 062

Note Title

09/12/2025

INTEGRALI IMPROPRI

Quando manca almeno uno degli ingredienti degli integrali propri:

→ zona di integrazione illimitata

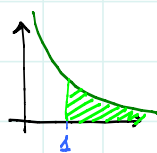
→ funzione illimitata

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$



FUNZ. NON
LIMITATA

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



ZONA INT.
NON LIMITATA

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$



ZONA E FUNZIONE
NON LIMITATE

INTEGRALI MONOPROBLEMA

Scenario 1 $\int_a^b f(x) dx$



Supponiamo che $f(x)$ abbia problemi

solo in a , cioè $\forall \epsilon > 0$ si ha che (basta $0 < \epsilon < b-a$)

$f(x)$ è integrabile in $[a+\epsilon, b]$. In questo caso per definizione

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

Il discorso è del tutto analogo se il problema è solo in b :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

Scenario 2

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$



Supponiamo che, per ogni $A > a$, si abbia che $f(x)$ è integrabile in $[a, A]$. Allora si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Discorso analogo per $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$

E se i problemi sono tanti?

Si spezza in tanti integrali con un problema solo

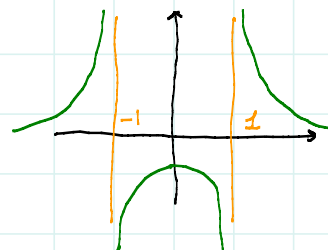
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^{16} \frac{1}{x} dx + \int_{16}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

↑ ↑
hanno un problema solo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{-25} \frac{1}{x^2+1} dx + \int_{-25}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} \dots + \int_{-2}^{-1} \dots + \int_{-1}^0 \dots + \int_0^1 \dots + \int_1^2 \dots + \int_2^{+\infty} \dots$$



Essendo un limite un integrale improprio un problema ha 4 possibilità:

- converge
- diverge a $+\infty$
- " " $-\infty$
- è indeterminato

Se i problemi sono più di uno, si spezza e poi si procede come nel limite della somma, con l'accordo che se almeno un pezzo diverge a $+\infty$ e almeno un pezzo diverge a $-\infty$, allora quello globale è INDETERMINATO per definizione.

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ [deve venire positivo]



$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^A$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-A} + e^{-1}] = \frac{1}{e}$$

$\downarrow$
0

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ [unico pbm. a $+\infty$: deve venire > 0]

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan A - \arctan 0] = \frac{\pi}{2}$$

Quindi per simmetria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Esempio 3 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ [Unico pbm. in $x=0$: deve venire > 0]

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}] = 2\sqrt{2}$$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sin A = \text{NON ESISTE}$
(indet.)

Esempio 5 $\int_0^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log 2 - \log \varepsilon) = +\infty$

Esempi classici

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

↑
qualunque
cosa > 0

Più a è grande,
più $f(x)$ è piccola
più è facile che
l'integrale
converga

$$\begin{aligned} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^a} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^A \\ &= \frac{1}{1-a} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{A^{a-1}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Se $a > 1$ il limite è $\frac{1}{a-1}$. Se $a < 1$ il limite è $+\infty$.

Se $a = 1$ la primitiva è $\log x$, quindi viene

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \log A = +\infty$$

qualunque cosa > 0

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \nearrow \text{converge} & \text{se } a < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \end{cases}$$

se a diventa
grande, il denom.
diventa piccolo,
quindi la funzione
è grande

La dim è come prima

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{1-a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon^{a-1}} \right]$$

↑
 $a \neq 1$

Se $a > 1$ il limite è $-(-\infty) = +\infty$

Se $a < 1$ il limite è $\frac{1}{1-a}$

Se $a = 1$ è l'esempio 5 di sopra.

Oss. Se l'unico problema è a $+\infty$, allora "il primo estremo non conta". Ad esempio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx \quad \text{si comporta come} \quad \int_{22}^{+\infty} \frac{1}{x^3-1} dx$$

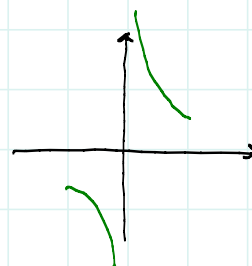
Infatti

$$\int_2^A \dots = \int_2^{22} \dots + \int_{22}^A \dots$$

quindi i due limiti differiscono per una costante.

L'ESEMPIO $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$



NO!!! Si tratta di un integrale improprio. Bisogna spezzare!

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } -\infty} + \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx}_{\text{Diverge a } +\infty}$$

Quindi è indeterminato

Ad esempio

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx$$



Il buco è ampio 2ε , ma la somma tende a $-\infty$.

Se scelgo bene gli estremi, tende a 2025.

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 063

Note Title

10/12/2025

CRITERI DI CONVERGENZA PER INTEGRALI IMPROPRI

Come stabilire se un integrale improprio (monoproblema) converge o no senza calcolarlo esplicitamente

Integrandi a segno costante

- criterio confronto
- criterio confronto asintotico
 - casi standard
 - casi limite

Integr. a segno variabile

- assoluta integrabilità

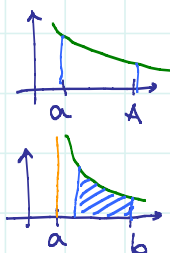
Oss. Se l'integranda $f(x)$ è ≥ 0 (vicino a dove c'è il problema) allora l'int. improprio può solo convergere o divergere a $+\infty$.

Dim. basta osservare che la quantità di cui si fa il limite è monotona nel parametro

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$ è deb. cresc. in A

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ è deb. decr. in ε

(una funzione che cresce andando indietro è decrescente)

Criterio confronto

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in E$

(basta $\forall x$ vicino al problema)

Allora valgono queste implicazioni (e solo queste)

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

c'è converge

Criterio confronto asintotico

$$\int_E f(x) dx$$

$$\int_E g(x) dx$$

Supponiamo $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ in E (vicino al problema)
e

$$\lim_{x \rightarrow \text{pbm}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \neq +\infty$$

↑
p.to in cui c'è il problema

Allora i due integrali hanno lo stesso comportamento.

Dim. Per x vicino al pbm. vale che $0 < \frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2l$
e quindi

$$\frac{1}{2} l g(x) \leq f(x) \leq 2l g(x)$$

Se $\int_E g(x) dx < +\infty$, quando disug. dx

Se $\int_E g(x) dx = +\infty$, quando disug. sx

Oss. Se $l = 0$ oppure $l = +\infty$, allora si salva solo una delle due implicazioni.

Absoluta integrabilità

$$\int_E |f(x)| dx < +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ converge}$$

Integrali da tabellina con cui confrontare

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \leq 1 \\ \searrow \text{converge se } b > 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int_0^a \frac{1}{x^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \geq 1 \\ \searrow \text{converge se } b < 1 \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^b} dx = \begin{cases} \nearrow \text{diverge se } b \leq 1 \\ \searrow \text{converge se } b > 1 \end{cases} \quad (a > 1)$$

↑
per evitare il
pbm di $\log \ln x = 1$

L'ultimo si dimostra facendo la primitiva, che è

$$\frac{1}{1-b} \frac{1}{(\log x)^{b-1}} \quad \text{se } b \neq 1 \quad \text{e} \quad \log(\log x) \quad \text{se } b = 1$$

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x \sqrt{x}} dx$

Integranda ≥ 0 . Due problemi: in 0 e $+\infty$. $\int_0^5 \dots + \int_5^{+\infty} \dots$

Pbm. a $+\infty$ $\frac{\arctan x}{x \sqrt{x}} \leq \frac{3/2}{x^{3/2}} \quad \frac{3}{2} > 1 \leadsto \text{converge}$

Pbm. a 0 Brutale: $f(x) \sim \frac{x}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \frac{1}{2} < 1 \leadsto \text{converge}$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

↑
problema

Quindi $\int_0^5 f(x) dx$ si comporta come $\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, cioè converge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Unico pbm. a $+\infty$, $f(x) \geq 0$ sempre. Ora

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 1 \quad (\text{cioè vicino al problema})$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty \quad (\text{si calcola}) \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

↑
confronto

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$

$f(x) \geq 0$. Solo problema a $+\infty$ perché in 0 la funzione è limitata

Brutale: $\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ quando $x \rightarrow +\infty$, quindi diverge perché l'esponente è 1.

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$ (diventa il solito limite notevole)

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos x| - 1}{x^2} dx$

$f(x) \leq 0$ sempre, quindi meglio studiare $\int_0^{+\infty} \frac{1 - |\cos x|}{x^2} dx$

Quanti problemi? Sicuramente $+\infty$

Per $x \rightarrow 0^+$ la funzione tende a $\frac{1}{2}$, quindi in 0 non c'è nessun problema!

Per il pbm. a $+\infty$ basta osservare che $0 \leq \frac{1 - |\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

Achtung! $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = +\infty$, ma questo non vuol dire che anche l'altro diverge

Diverge per colpa del pbm. in 0, mentre a $+\infty$ converge, quindi il nostro per confronto converge!!

MORALE: il confronto vale solo tra integrali unoproblema

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x}$

Seguo variabile, problemi in $x=0$ e $x=+\infty$

pbm in $x=0$ Osservo che $0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^3 |f(x)| dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x+\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$ confronto tra
integrande ≥ 0
 $\uparrow$ assol.
integrabilità

Problema a $+\infty$ Osservo che $f(x) \geq 0$ per x grandi

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2}$, quindi converge

$\uparrow$
 $g(x)$ con cui
confrontare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \sim \dots$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 064

Note Title

10/12/2025

Integrali con problemi in punti strani

SLOGAN: portare il problema in zero!

Esempio 1 $\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx$



Pongo $x = y+1 \Rightarrow dx = dy$

$$\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx = \int_0^2 \frac{1}{\log(y+1)} dy \quad \text{Ora il pbm. è in 0}$$

Brutale $\frac{1}{\log(1+y)} \sim \frac{1}{y}$ quando $y \rightarrow 0^+$

quindi si comporta come $\int \frac{1}{y} dy$ con pbm. in $y=0$, cioè diverge.

Oss. È lecito fare i cambi variabile sugli int. impropri?

Sì, basta farlo prima di passare al limite

$$\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{1}{\log x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{\log(1+y)} dy$$

facciamo il
cambio sull'int.
PROPRIO

$$= \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)} dy$$

Esempio 2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$

Il pbm. è in $x = \frac{\pi}{2}^-$. Come lo porto in 0^+ ?

Pongo $y = \frac{\pi}{2} - x$ da cui $dy = -dx$

$$\begin{aligned} x=0 &\leadsto y = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} &\leadsto y = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

precorso $\nearrow$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$

$\frac{\cos x}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \rightarrow 0^+$, quindi diverge

Esempio 3 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{\log x}}$ Due problemi, $f(x) \geq 0$

$x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \leq \frac{1}{x^2}$ per x grande ($x \geq e$)

Quindi per confronto a 2 converge

$x=1$ Brutale $\frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\log x}}$ e ci si riduce a $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con p.b.m. in $y=0$

Rigoroso: come prima $x = 1+y$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{\log x}} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2 \sqrt{\log(1+y)}} \, dy$$

$\uparrow$
C.A. con $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

Esempio 4 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \, dx$ $f(x) \geq 0$ e 2 p.b.m.

$x \rightarrow +\infty$ Converge per C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$x=1$ $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$

$\uparrow \uparrow$
colpevole dell'improprietà

quindi è come fosse $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ con p.b.m. in $x=1$, cioè $\frac{1}{\sqrt{y}}$ con p.b.m. in $y=0$, quindi converge

Tabellina

$$\int \frac{1}{|x-a|^b} dx =$$

↑
con pbm.
in $x=a$

converge se $b < 1$
 diverge se $b \geq 1$

Dim: si riporta in 0 ponendo $x-a=y$

Esempio 5 $\int_0^1 (\log x)^{30} dx$



Converge! Confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log x)^{30}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\log x)^{30} = 0 \quad (\text{limite dimenticato})$$

↑
caso limite

Quindi vicino a 0 vale

$$0 \leq (\log x)^{30} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{e si chiude per confronto}$$

Esempio 6 $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^4 - 1} dx$ $f(x) \geq 0$ sempre (i segni si compensano)

Problemi in $0, 1, +\infty$

+∞ Converge ($\log x$ rompe, un po' poco). C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \log x}{x^4 - 1} = 0 \quad \text{caso limite!}$$

quindi $f(x) \leq \frac{1}{x^3}$ per x grandi, e si chiude per confronto.

x=1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}$

↑
Hôp

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{(1+y)^4 - 1} \\ = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{4y + o(y)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Quindi il pbm. in $x=1$ non c'è !!!

$x > 0$ $f(x) \rightarrow +\infty$, sì ma quanto! Come $-\log x$

Quindi confronto asintotico con $g(x) = -\log x$ e $\int_0^1 (-\log x) dx$ converge (volendo si calcola, volendo si confronta con $\frac{1}{\sqrt{x}}$).

Esempio 7 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^7 + 3x^3 - 2}} dx$

C'è un problema $a + \infty$ e converge per C.A. con $\frac{1}{x^{7/3}}$ e $\frac{7}{3} > 1$.

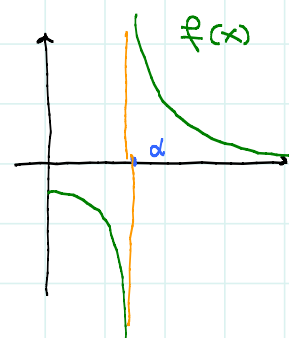
Problema più grave: il denom. si annulla da qualche parte, perché in $x=0$ vale -2 e per $x \rightarrow +\infty$ tende a $+\infty$.

Si annulla in un solo p.to perché è strett. crescente:

La sua derivata è $7x^6 + 9x^2 \geq 0$ con annullamento sporadico.

Quindi c'è un unico altro p.to. in un p.to $\alpha > 0$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \int_0^{\alpha} \dots + \int_{\alpha}^{\alpha+\epsilon} \dots + \underbrace{\int_{\alpha+\epsilon}^{+\infty} \dots}_{\text{c.o.}}$$



Non conosco α , ma faccio il claim che

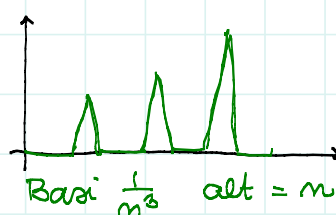
$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x - \alpha}}$$

Se fosse così, convergono anche gli altri 2

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt[3]{x - \alpha}}{\sqrt[3]{x^7 + 3x^3 - 2}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x - \alpha}{x^7 + 3x^3 - 2}}$$

$$\stackrel{\text{Höp}}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{7x^6 + 9x^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7\alpha^6 + 9\alpha^2}} \neq 0 \text{ e } \neq +\infty$$

Achtung! Non c'è la cond. nec. per la conv. degli int. impropri



ANALISI 1 - LEZIONE 65

Note Title

15/12/2025

INTEGRALI OSCILLANTI (Oscillatory integrals)

Due strumenti : $\rightarrow$ trucco integrandione per parti
 $\rightarrow$ metodo dei triangolini (rettangolini)

Esempi principali

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

convergono

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx = +\infty$$

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$$

Interpretazione grafica

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx =$ somma a segno
 alternata delle aree
 (converge per "effetto
 Leibniz")



$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx =$ la somma con il segno + diverge

Integrali classici $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integrale di GAUSS)

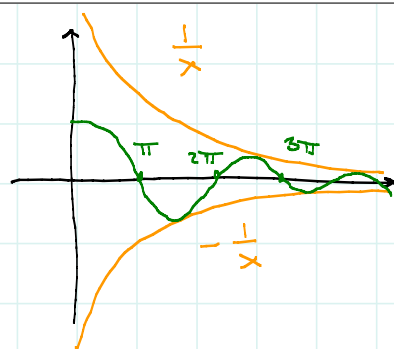
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (integrale di DIRICHLET)

$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ (integrale di FRESNEL)

AM2

Esempio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{integrale PROPRIO}} + \int_1^{+\infty} \dots$$



$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx &= \int_1^A \sin x \cdot \frac{1}{x} dx = \left[-\cos x \cdot \frac{1}{x} \right]_1^A - \int_1^A (-\cos x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \\ &= -\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

Facciamo il limite per $A \rightarrow +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos 1}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

L'ultimo però è un integrale improprio sul quale posso usare assoluta integrabilità

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$ confronto tra integrande ≥ 0
 $\uparrow$ assol. integrab.

Oss. Allo stesso modo si dimostra che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx \text{ converge per ogni } a > 0$$

(in 0 ci sarebbe una convergenza appena $a \geq 2$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx \text{ converge per ogni } a > 0$$

(in 0 ci sarebbe una convergenza appena $a \geq 1$)

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

$$\int_0^{+\infty} \dots = \underbrace{\int_0^1 \dots}_{\text{PROPRIO}} + \int_1^{+\infty} \dots$$

$$\int_1^A \cos(x^2) dx = \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx$$

$$= \left[\underbrace{\frac{1}{2x}}_G \underbrace{\sin(x^2)}_F \right]_1^A - \int_1^A \underbrace{\sin(x^2)}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2}\right)}_g dx$$

$$= \frac{\sin(A^2)}{2A} - \frac{\sin 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$$

Passando al limite si conclude come prima.

Oss. Allo stesso modo si fa quello con $\sin(x^2)$

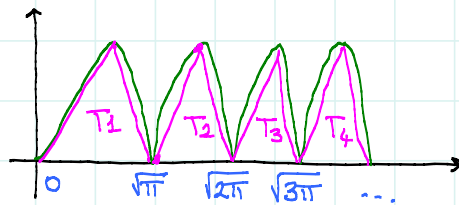
Analogamente si ottiene la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^a) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^a) dx$$

purché $a > 1$.

Nota che per $a = 1$ risultano entrambi indeterminati
— 0 —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx = +\infty$



Idea: l'integrale improprio è
 $\geq$ della somma delle aree
 dei triangolini che stanno sotto il grafico.

Il triangolo T_k ha altezza 1 e come base l'intervallo
 $[\sqrt{(k-1)\pi}, \sqrt{k\pi}]$

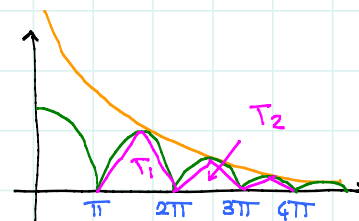
quindi la base è lunga $\sqrt{\pi} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

Quindi

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx \geq \underbrace{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}_{\text{area} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza}}$$

La serie diverge perché $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$



La base di T_k è lunga π

L'altezza è il valore della funzione

nel p.to medio della base che è $k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Quindi $\text{Area}(T_k) = \frac{1}{2} \pi \frac{2}{\pi} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$

e come prima $\int_0^{+\infty} \dots \geq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} = +\infty$

Oss. lo stesso metodo mostra che $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^a} dx = +\infty \quad \forall a \leq 1$

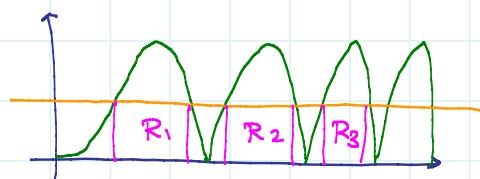
Achtung! Nei due esempi abbiamo assunto che il triangolino stia sotto la funzione, il che andrebbe dimostrato (nel caso di T_2 del primo esempio è pure falso!)

Via uscita facile: usare i rettangolini.

Nel primo esempio mi chiedo dove $|\sin(x^2)| \geq \frac{1}{2}$

L'altezza di R_k è $\frac{1}{2}$

La base è ... $|\sin(x^2)| = \frac{1}{2}$



$$x^2 = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x^2 = k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

La base è lunga $\sqrt{k\pi + \frac{5\pi}{6}} - \sqrt{k\pi + \frac{\pi}{6}} \sim \frac{\text{costante}}{\sqrt{k}}$

Stesso discorso per l'esempio 4.

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 66

Note Title

15/12/2025

Criterio di DIRICHLET

Consideriamo integrali con problemi all'infinito del tipo

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx$$

Supponiamo che

- ① la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ è limitata
 - ② la funzione g è di classe C^1 , deb. decr., e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.
- Allora l'integrale improprio converge

Dim Integro per parti:

$$\int_a^A f(x) \cdot g(x) dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^A - \int_a^A F(x) \cdot g'(x) dx$$

Vediamo i due pezzi

$$[F(x)g(x)]_a^A = \underbrace{F(A)g(A)}_{\substack{\downarrow \\ \text{per le ipotesi}}} - \underbrace{F(a)g(a)}_{\text{numero}}$$

Dico che $\int_a^{+\infty} F(x) \cdot g'(x) dx$ è assolutamente integrabile

$$\begin{aligned} \int_a^A \underbrace{|F(x)|}_{\leq M} \cdot |g'(x)| dx &\leq M \int_a^A |g'(x)| dx = -M \int_a^A g'(x) dx \\ &\quad \substack{\uparrow \\ \leq 0 \text{ per} \\ \text{ipotesi}} \\ &= -M (g(A) - g(a)) \\ &\quad \substack{\downarrow \\ 0} \end{aligned}$$

Quindi, mandando $A \rightarrow +\infty$, ottengo

$$\int_a^{+\infty} |F(x)| \cdot |g'(x)| dx \leq M \cdot g(a) \quad \text{☺}$$

Oss. Posso rimpiazzare la monotonia di g nell'ipotesi 2 con

$$\int_a^{+\infty} |g'(x)| dx < +\infty \quad (\text{variazione limitata})$$

— o — o —

DIRICHLET PER SERIE

Lemma di sommazione parziale (ABEL) (int. per parti con le serie)

Siano a_n e b_n due successioni.

Allora per ogni coppia di interi $0 \leq m < n$ vale la relazione

$$\sum_{k=m}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m - \sum_{k=m}^n b_k (a_{k+1} - a_k)$$

Dim. Considero $a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k$ (specie di derivata del prodotto) e sommiamo per $k = m, \dots, n$

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m$$

↑
telescopica

(int. derivata = differenza valori agli estremi)

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum_{k=m}^n (a_{k+1} b_{k+1} - a_{k+1} b_k + a_{k+1} b_k - a_k b_k) \\ &= \sum_{k=m}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^n b_k (a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

Riorganizzando i termini ottengo la tesi.

Criterio di Dirichlet per le serie

Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Supponiamo che

- ① le somme parziali di A_n sono limitate
- ② b_n è deb. decr. e $b_n \rightarrow 0$

Allora la serie converge.

Oss. Dirichlet $\Rightarrow$ Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} b_n$$

Le somme parziali di A_n sono limitate (sono 0 e ± 1 alternati)
Le ipotesi su b_n sono le stesse.

Dim di DIRICHLET

Uso il lemma di sommazione con
 A_k al posto di b_k e $(A_k = a_1 + \dots + a_k)$
 b_k al posto di a_k

Il lemma diventa

$$\sum_{k=m}^n b_{k+1} (A_{k+1} - A_k) = b_{m+1} A_{m+1} - b_m A_m - \sum_{k=m}^n A_k (b_{k+1} - b_k)$$

La uso con $m = 1$ (o comunque l'indice iniziale) e $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^n b_{k+1} a_{k+1} = \underbrace{b_{m+1} A_{m+1} - b_m A_m}_{\substack{\downarrow 0 \quad \downarrow \text{limit.} \\ \downarrow 0}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n A_k (b_{k+1} - b_k)}_{\text{spesso assol. conv.}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \underbrace{|A_k|}_{\leq M} \cdot |b_{k+1} - b_k| &\leq M \sum_{k=1}^n |b_{k+1} - b_k| = -M \sum_{k=1}^n (b_{k+1} - b_k) \\ &= -M (b_{m+1} - b_1) = \underbrace{Mb_1}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

tutto come nel caso degli integrali.

Oss. Come con gli integrali posso sostituire la monotonia di b_n con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k| < +\infty.$$

Esempio classico $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ o più in gen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^a}$ $a > 0$

Con $a > 1$ c'è assoluta convergenza. Con $a > 0$ c'è comunque convergenza per Dirichlet.

Cosa serve?

Serve che le somme parziali di $\sin n$ abbiano un bound uniforme, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall n \geq 1 \quad \left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq M$$

In generale c'è una formula per le somme di $\sin(kx)$ che si dimostra per induzione.

Idea per ottenerla osservando che $\sin(kx) = \operatorname{Im}(e^{ikx})$ quindi

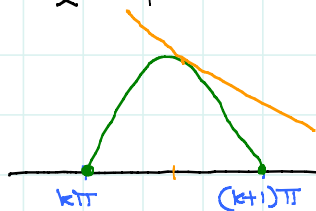
$$\sum_{k=1}^n \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n e^{ikx}}_{\text{geometrica}} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix(n+1)} - 1}{e^{ix} - 1} \right)$$

ora basta usare le formule per le potenze dei numeri complessi. Il bound segue dal fatto che al num. ci sono solo $\sin$ e $\cos$ e il denom. non dipende da n .

Back to lezione precedente Come è fatta $\frac{|\sin x|}{x}$ per $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$

C'è un max, ma non è nel pto medio.

1° modo: derivo e vedo che $f'(\text{pto medio}) \neq 0$



2° modo: nel pto medio è tangente a $\frac{1}{x}$, quindi ha la stessa derivata che è < 0 , quindi un po' a sx del pto medio vale di più

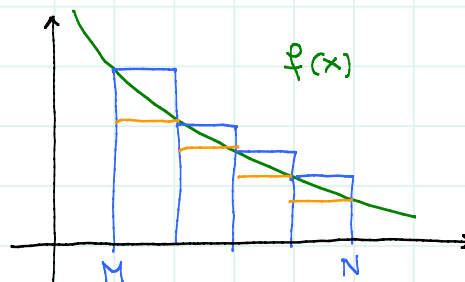
ANALISI 1 - LEZIONE 067

Note Title

16/12/2025

CONFRONTI SERIE - INTEGRALI (Gli integrali aiutano la serie)Ipotesi: $M \in \mathbb{N}$

$$f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

 f debolm. decrescente

Allora per ogni $N > M$ intero
valgono le disuguaglianze

$$\sum_{k=M+1}^N f(k) \leq \int_M^N f(x) dx \leq \sum_{k=M}^{N-1} f(k)$$

Geometricamente è: area blu $\leq$ integrale $\leq$ area arancioni

Diciam Andrebbe fatta per induzione su N con passo base $N = M+1$.

Al passo induttivo si usa che

$$f(N+1) \leq \int_N^{N+1} f(x) dx \leq f(N)$$

per la monotonia di $f(x)$.

— o — o —

Facendo il limite per $N \rightarrow +\infty$ otteniamo che

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=M}^{+\infty} f(k)$$

Oss. Essendo $f(x)$ monotona, definitivamente ha segno costante, quindi i limiti esistono in $\overline{\mathbb{R}}$.

La cosa è più interessante quando $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$ così c'è la cond. nec. per la serie

Corollario Nelle ipotesi di sopra, quindi $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ debolm. decr., vale che

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=M}^{+\infty} f(k) \text{ converge}$$

Dim Se l'int. converge, quando disug. $\sum x$
 " diverge " $\sum dx$.

In questo modo si studia facilmente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\log k)^a}$$

Si riducono ai corrispondenti integrali, per cui sappiamo fare le primitive ☺

Dimostrazioni possibili : $\rightarrow$ serie - integrali
 $\rightarrow$ condensazione di Cauchy
 $\rightarrow$ disuguaglianze ad hoc

Il range più delicato è $a \in (1, 2)$. Da serie - integrali otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^m \frac{1}{k^a} &\leq \int_1^m \frac{1}{x^a} dx = \left[\frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^m = \frac{1}{1-a} \left(\frac{1}{m^{a-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a-1} \left(1 - \frac{1}{m^{a-1}} \right) \end{aligned}$$

Aggiungendo il 1° termine diventa

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq 1 + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

$$= \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}}$$

Provare a dimostrarla per induzione!

Esercizio 1 Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)}^{a_n}$$

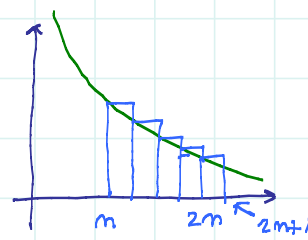
Volendo si può dim. in maniera elementare che la succ a_n è monotona e ha un limite $l \in (0, +\infty)$.

Brutal mode: $a_n \sim \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \log(2n) - \log n = \log 2$ " "

Per renderlo riguroso uso la disug. serie integrali

$$\int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq a_n \leq \int_{n-1}^{2n} \frac{1}{x} dx$$

$$\underbrace{\log \frac{2n+1}{n}}_{\log 2} \leq a_n \leq \underbrace{\log \frac{2n}{n-1}}_{\log 2}$$



Quindi $a_n \rightarrow \log 2$ per i carabinieri.

Esercizio 2 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S_n$. Allora $S_n \rightarrow +\infty$. Ma come?

Risposta: $S_n \sim \log n$, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\log n} = 1$

Rigoroso:

$$\int_1^{m+1} \frac{1}{x} dx \leq S_m \leq 1 + \int_1^m \frac{1}{x} dx$$

" " " "

$$\log(m+1) \qquad 1 + \log m$$

Esercizio 3

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$$

Brutal mode: $\sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan x \sim x}}{\sim} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k} \sim \int_m^{3m} \frac{1}{x} dx = \log 3$

Rigoroso: chiamo a_k la succ. e cerco stime dall'alto e dal basso

$$\sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k} \leq \int_{m-1}^{3m} \frac{1}{x} dx \leq \log \frac{3m}{m-1}$$

$\uparrow$ $\arctan x \leq x$ per $x \geq 0$ $\downarrow$ $\log 3$

$$\sum_{k=m}^{3m} \arctan\left(\frac{1}{k}\right) \geq \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k} - \frac{1}{3k^3} \geq \int_m^{3m+1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{3} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k^3}$$

$$= \log \frac{3m+1}{m} - \frac{1}{3} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k^3}$$

$\uparrow$ $\arctan x \geq x - \frac{x^3}{3}$ per $x \geq 0$ (studio di funzioni) $\downarrow$ $\log 3$ $\downarrow$ 0

Fatto generale Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, allora $\sum_{k=m}^{3m} a_k \rightarrow 0$
(code di serie convergenti tendono a 0)

Dim Chiamo S_m le somme parziali. Allora

$$\sum_{k=m}^{3m} a_k = \underbrace{S_{3m}}_e - \underbrace{S_{m-1}}_e \rightarrow 0$$

Esercizio 4

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^5} = C_m \quad \text{Allora } C_m \rightarrow 0$$

Ma come?

Brutale: $C_m \sim \int_m^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{x^4} \right]_m^{+\infty} = \frac{1}{4m^4}$

Claim: C_m ha parte principale $\frac{1}{4m^4}$.

Per dimostrarlo basta osservare che

$$\int_m^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx \leq C_m \leq \int_{m-1}^{+\infty} \frac{1}{x^5} dx$$

e i due laterali si calcolano.

— o — o —

ANALISI 1 -

LEZIONE 068

Note Title

16/12/2025

STUDIO DI FUNZIONI INTEGRALI

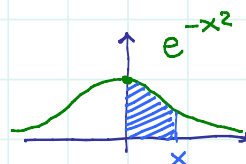
Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Simmetrie: $f(x)$ è DISPARI perché l'integranda è pari

Definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Zeri e segno: $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \text{numero} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



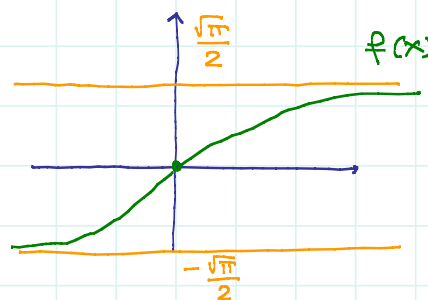
Monotonia: $f'(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ci aspettiamo che sia

→ concava per $x \geq 0$

→ convessa per $x \leq 0$

$$f''(x) = -2x e^{-x^2} \text{ conferma}$$



Esercizio 2 Risolvere la disequazione $\arctan x > \int_0^x e^{-x^2} dx$
(per x grande è verificata perché $\frac{\pi}{2} > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Studio la funzione $\varphi(x) := \arctan x - \int_0^x e^{-x^2} dx$

Dispari, definita e continua in $\mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$.

Sarà monotona?

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2}$$

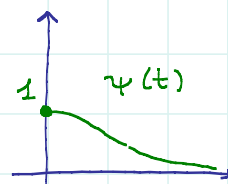
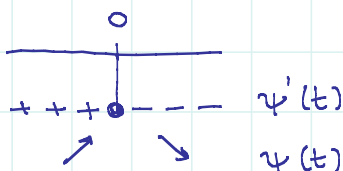
Ci piacerebbe che fosse $\varphi'(x) \geq 0$. Osservo che

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (1+x^2)e^{-x^2} \leq 1$$

Studio $\psi(t) := (1+t)e^{-t}$

$$\psi'(t) = e^{-t} - e^{-t}(1+t) = -te^{-t}$$

$$\psi(0) = 1$$



Abbiamo dimostrato che $\psi(t) \leq 1 \quad \forall t \geq 0$ con uguagl. $\Leftrightarrow t=0$

Quindi, ponendo $t = x^2$, abbiamo che

$$(1+x^2)e^{-x^2} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con uguagl.} \Leftrightarrow x=0$$

Quindi $\varphi'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con uguagl. $\Leftrightarrow x=0$

Monotonia 3 $\Rightarrow \varphi$ strett. cresc. $\Rightarrow \varphi(x) > 0$ per ogni $x > 0$
 $\varphi(x) < 0$ " $x < 0$.

Quindi la disug. iniziale ha come sol. $x > 0$.

Esercizio 3 Studiare $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$ (Due estremi "strani")

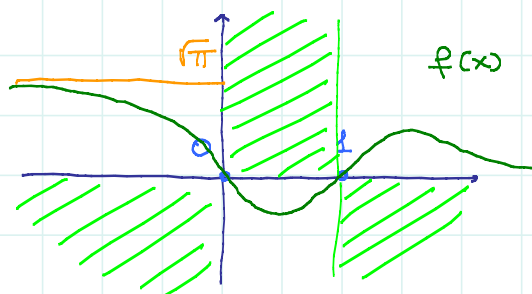
Continua e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Niente simmetrie.

Dove si annulla? Essendo $e^{-t^2} > 0$, può annullarsi solo quando gli estremi coincidono, cioè

$$x = x^2 \leadsto x = 0, 1$$

Per lo stesso motivo

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad (\text{coda di integrale convergente})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Continua + limiti finiti a $\pm\infty \Rightarrow$ funzione limitata

In questo caso sappiamo anche che $f(x) < \sqrt{\pi} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ per questioni di integrali.

Chi è $f'(x)$?

Fatto generale:
$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \varphi(t) dt$$

$$\leadsto f'(x) = \varphi(b(x)) b'(x) - \varphi(a(x)) a'(x)$$

Dim Detta Φ una primitiva di φ , abbiamo che

$$f(x) = \Phi(b(x)) - \Phi(a(x))$$

quindi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Phi'(b(x)) b'(x) - \Phi'(a(x)) a'(x) \\ &= \underbrace{\varphi(b(x))}_{\text{---o---}} \underbrace{b'(x)}_{\text{---o---}} - \underbrace{\varphi(a(x))}_{\text{---o---}} \underbrace{a'(x)}_{\text{---o---}} \end{aligned}$$

Nel nostro caso
$$f'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x - e^{-x^2} \cdot 1$$

$$= e^{-x^2} \left(2x e^{x^2-x^4} - 1 \right)$$

il segno dipende da questo

e studiando questa funzione

forse si vede che si annulla 2 volte

$f(x)$ è Lipschitziana? Sì, anche su tutto $\mathbb{R}$.

Basta osservare che la derivata è limitata e lo è perché è continua e ha limiti finiti per $x \rightarrow \pm\infty$

[Provare a dim. per bene questo fatto]

Esercizio 4 Sia f quella dell'esercizio 3.

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x}{x^2}$$

1° modo: L'Hôpital essendo $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + \cos x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot e^{-x^4} - e^{-x^2} + \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 1 + x^2 + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x} = 1 \end{aligned}$$

2° modo Chi è il polinomio di Taylor di ordine 2 di $f(x)$?
 " 5 di $f(x)$?

$$\begin{aligned} \text{Brutal mode: } f(x) &= \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt \\ &= \int_x^{x^2} \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^5)\right) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{t^5}{10} \right]_x^{x^2} + [o(t^6)]_x^{x^2} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 + o(x^5) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{pol. di Taylor di } f(x) \text{ di grado 5}} \end{aligned}$$

L'unico passaggio brutale è

$$\varphi(t) = o(t^a) \text{ per } t \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi(t) = o(t^{a+1}) \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t^{a+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hôp}}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{(a+1)t^a} = 0$$

Achtung! Per le derivate NON FUNZIONA

$$f(x) = x^{11} \sin \frac{1}{x^{100}} \quad \text{Allora } f(x) = o(x^{10}) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{Ma } f'(x) = \underbrace{11 \cdot x^{10} \sin \frac{1}{x^{100}}}_{o(x^9)} - \underbrace{x^{11} \cos \frac{1}{x^{100}} \cdot (100) \frac{1}{x^{101}}}_{\substack{\text{c'è } x^{80} \text{ al denominatore} \\ \Rightarrow \text{terribile}}}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 069

Note Title

17/12/2025

Integrabilità del prodottoIpotesi : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabileTesi : prodotto $f(x) \cdot g(x)$ è integrabileDim Per il criterio di integrabilità, per ogni $\varepsilon > 0$ devo trovare step functions φ e ψ b.c.

$$\varphi(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \psi(x)$$

e

$$\int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$

Problema date step funct. analoghe per f e g , come produrre quelle per $f \cdot g$?Scenario buono : $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ sempre. In questo caso posso supporre che le s.f. per f e g siano ≥ 0 .Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esistono

$$0 \leq \varphi_f(x) \leq f(x) \leq \psi_f(x)$$

$$0 \leq \varphi_g(x) \leq g(x) \leq \psi_g(x)$$

tali che

$$\int_a^b (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}, \quad \int_a^b (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2M_f}$$

Allora tutando

$$\varphi_f(x) \varphi_g(x) \leq f(x) g(x) \leq \psi_f(x) \psi_g(x)$$

(qui è fondamentale che sia roba ≥ 0)

$$\int (\psi_f(x) \psi_g(x) - \varphi_f(x) \varphi_g(x)) dx$$

$$= \int \underbrace{\psi_f(x)}_{\leq M_f} (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx + \int \underbrace{\varphi_g(x)}_{\leq M_g} (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx$$

← bound per f e g →

$$\leq M_f \int (\psi_g(x) - \varphi_g(x)) dx + M_g \int (\psi_f(x) - \varphi_f(x)) dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2M_f} \leq \frac{\varepsilon}{2M_g}$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

[Bisogna osservare che i casi $M_f = 0$ oppure $M_g = 0$ sono banali]

Scenario semi-buono: f e g hanno segno costante
(eventualmente diverso) in $[a, b]$
[Basta tirare fuori i segni -]

Scenario generale: Scriviamo

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x)$$

$$g(x) = g_+(x) + g_-(x)$$

$$\text{con } f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e idem per } g_+ \text{ e } g_-$$

$$f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

Osserviamo che

→ f_+, f_-, g_+, g_- sono integrabili (max/min di funz. int.)

→ $f \cdot g = f_+ g_+ + f_+ g_- + f_- g_+ + f_- g_-$ è somma di quattro funz. integrabili.

Possibile scorciatoia dopo lo scenario buono:

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$$

f int. $\Rightarrow |f|$ int $\Rightarrow f^2 = |f|^2$ è int. perché prodotto di due funz. ≥ 0

Idea per g^2 e $(f+g)^2$ integrabili. Ma allora

$$fg = \frac{1}{2} [(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

è somma / diff. di funzioni integr.

Esercizio 1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ è indeterminato

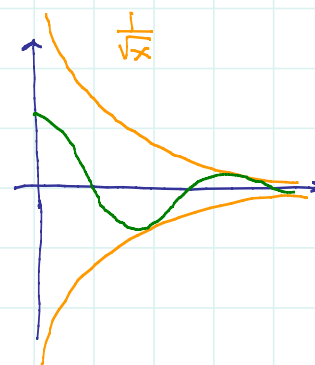
$$\begin{aligned} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2 \cos(\sqrt{x})]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2 \cos(\sqrt{A}) + 2] \end{aligned}$$

Questo limite non esiste: basta considerare le due succ.

$$A_m = (2m\pi)^2$$

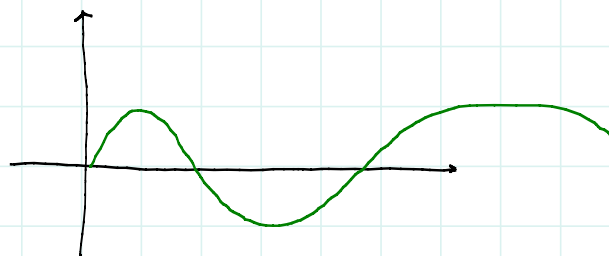
$$B_m = (2m\pi + \pi)^2$$

Graficamente: le oscillazioni sono sempre più lunghe e le aree sotto non tendono a zero



Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{x}) dx$

L'idea è che sia parecchio indeterminato



Anche qui si fa la primitiva

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x}) dx &= \int_{\substack{y=\sqrt{x} \\ x=y^2 \\ dx=2y dy}} 2y \sin y dy = -2y \cos y + 2 \int \cos y dy \\ &= -2y \cos y + 2 \sin y \\ &= -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Verifica: $[-2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin \sqrt{x}]'$

$$= -2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(\sqrt{x}) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-2\sqrt{A} \cos(\sqrt{A}) + 2 \sin(\sqrt{A})] = \text{non esiste}$$

Se prendo $A_m = (2\pi m)^2$ tende a $-\infty$

$B_m = (2\pi m + \pi)^2$ tende a $+\infty$

Domanda: di che ordine sono le aree sotto le varie "colline"?

Si stimano con rettangoli / triangoli con altezza 1 e basi

$$(2\pi m + \pi)^2 - (2\pi m)^2 \sim 4\pi^2 m$$

Esempio 4 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^x) dx$

Due problemi: $+\infty$ e $-\infty$

$$\int_{-\infty}^0 \sin(e^x) dx \text{ converge per confronto asintotico con } e^x$$

≥ 0 per $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

e $\int_0^{\infty} e^x dx$ converge (volendo usando la defn.)

$\int_0^{+\infty} \sin(e^x) dx$ dovrebbe convergere per via delle oscillazioni forti

$$\sin(e^x) = \underbrace{e^x \sin(e^x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{la primitiva} \\ -\cos(e^x) \text{ è} \\ \text{limitata}}} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\substack{\uparrow \\ \text{decrecente} \\ \text{e tende a 0}}} \rightsquigarrow \text{DIRICHLET}$$

Esempio 5 $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(e^x) dx$ diverge a $+\infty$

A $+\infty$ converge per Dirichlet

A $-\infty$ la funzione tende a 1, quindi diverge a $+\infty$

Esempio 6 $\int_{-\infty}^0 |\sin(e^x)| dx$
è quello di prima
😊

$$\int_0^{+\infty} |\sin(e^x)| dx$$

Diverge a $+\infty$ e
si dimostra con i
rettangolini / triangolini
Le basi sono
 $\sim \log(n+1) - \log n$
 $= \log \frac{n+1}{n}$
 $= \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 070

Note Title

17/12/2025

Esercizio 1 $\sum_{k=m^2}^{m^3} k^7$ ordine di infinito e parte principale

Brutal mode: $\sim \int_{m^2}^{m^3} x^7 dx = \left[\frac{1}{8} x^8 \right]_{m^2}^{m^3} \sim \frac{1}{8} m^{24}$

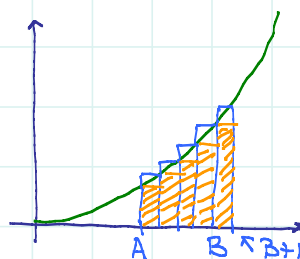
Rigoroso: confronto con l'integrale

Per $f(x)$ crescente vale che

$$\sum_{k=A}^B f(k) \leq \int_A^{B+1} f(x) dx$$

$$\sum_{k=A}^B f(k) \geq \int_{A-1}^B f(x) dx$$

↑
due manciolini traslate
a sx di 1



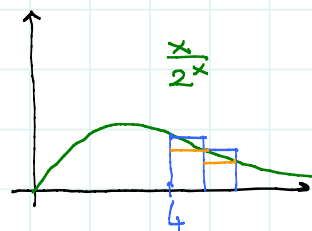
Esercizio 2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ Quanti termini sommare per avere un errore $\leq \frac{1}{100}$ (fare stima)

Devo trovare $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \frac{1}{100}$

Studiando la funzione si vede che prima cresce e poi decresce

$$k=3 \rightsquigarrow \frac{3}{8}$$

$$k=4 \rightsquigarrow \frac{1}{4} < \frac{3}{8} \rightsquigarrow \text{da } 4 \text{ in poi già decresce}$$



Per la solita disug. $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \leq \int_n^{+\infty} x 2^{-x} dx$

e quest'ultimo si calcola per parti e quindi si riesce a stimare n

$$\int x 2^{-x} dx = -x 2^{-x} \frac{1}{\log 2} + \int 2^{-x} \frac{1}{\log 2} dx$$

$$= -x 2^{-x} \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{(\log 2)^2} 2^{-x}$$

Ora lo calcolo tra n e $+\infty$ e impongo che sia $< \frac{1}{100}$

Esempio 3 Calcolare $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

Dipende da n . Per $n=0$ viene $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = +1$

Chiamiamolo I_n . Allora

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \underset{G}{x^{n+1}} \underset{f}{e^{-x}} dx = \left[\underset{G}{-x^{n+1}} \underset{f}{e^{-x}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1) x^n e^{-x} dx$$

$$= (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = (n+1) I_n \quad \ddot{}$$

Quindi $I_n = n!$

Oss. Posso porre $I(x) := \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

Questa è definita per ogni $x > -1$ (questo garantisce la convergenza per il p.b.m. in $t=0$)

Calcolare $I(-\frac{1}{2})$

$$I(-\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \stackrel{\substack{\uparrow \\ t=y^2 \\ dt=2y dy}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-y^2} \cdot 2y dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Oss. Un giorno sarà $I(x) = \Gamma(x+1)$ (Γ di Eulero)

Esempio 4 $f(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$

↑
voglio evitare
pbm in $t=1$

Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ Viene $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log t} dt$

e questo diverge ad esempio per confronto asint. con $\frac{1}{t}$ ($\circ \frac{1}{\sqrt{t}}$)

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\log t} = +\infty$ quindi $\frac{t}{\log t} \geq 1$ per t grandi
quindi $\frac{1}{\log t} \geq \frac{1}{t}$ per t grandi

Il limite è $+\infty$. Ma quanto cresce? Cresce come $\frac{x}{\log x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{x}{\log x}} \stackrel{\uparrow \text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\frac{\log x - 1}{\log^2 x}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} \frac{\log^2 x}{\log x - 1} = 1 \quad \ddot{\smile}$

Esempio 5 Come cresce $\int_0^x e^{t^2} dt$?

Provo con $\frac{e^{x^2}}{2x} = g(x)$ [La primitiva cresce meno della funzione!]

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2}}$

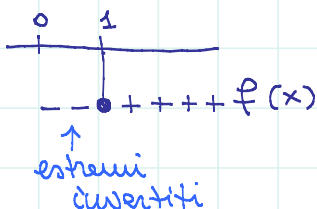
$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2x^2}} = 1 \quad \ddot{\smile}$

Esempio 6 $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$

Per quali x è definita? Per $x \geq 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$

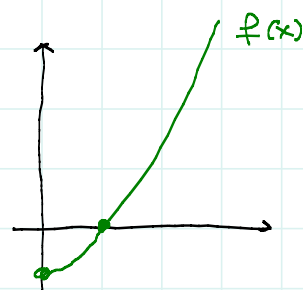
$\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$
che converge $\sim \frac{1}{\sqrt{t}}$

Segno?



Monotonia? $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \rightsquigarrow$ strett. crescente

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (l'integrale si diverge)



Quanto cresce a $+\infty$? Provo con $\sqrt{x} e^x = g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x} e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{2\sqrt{x}}{1+2x} = 0, \text{ quindi non è quello giusto}$$

Secondo tentativo $g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \dots$ con questo dovrebbe venire

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 071

Note Title

26/02/2026

Secondo semestre :

→ eq. differenziali

→ succ. per ricorrenza

→ liminf / limsup

→ compattezza vs completezza

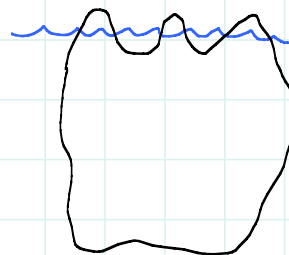
→ moduli di continuità

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Incognita è una funzione

 $f(x) \quad f(t) \quad x(t) \quad \boxed{u(t)} \quad u(x)$

$\uparrow \quad \uparrow$
 incognito



Tra le incognite c'è anche l'insieme di definizione

 $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\uparrow \quad \uparrow$
 incognito $\uparrow$ fisso

L'equazione si presenta come un'uguaglianza che coinvolge la t , la funzione u e un po' di sue derivate.Esempi

$$u'(t) = u(t)$$

$$u'(t) = u(t) - t^2$$

$$u''(t) + t[u'(t)]^2 + u(t) = 0$$

$$u' = u$$

$$u' = u - t^2$$

$$u'' + t(u')^2 + u = 0$$

Spesso $u' \rightsquigarrow \dot{u}$ $u'' \rightsquigarrow \ddot{u}$ Quando sale $u^{(15)}$

↑
 Notazione rapida: non
 metto le t che sono
 argomento della u

Risolvere l'eq. vuol dire trovare $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa l'uguaglianza per ogni $t \in [a, b]$.

Def. Si dice ORDINE di un'eq. diff. il massimo ordine di derivazione che compare

$$\dot{u} = u^2 + \sin t \quad \rightsquigarrow \text{ordine 1}$$

$$\ddot{u} = u^2 + \cos t \quad \rightsquigarrow \text{ordine 2}$$

Def. Un'eq. diff. si dice AUTONOMA se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate (quindi in notazione rapida la t non ci sono proprio)

$$\ddot{u}(t) = u(t)^2$$

autonoma

$$\ddot{u}(t) = u(t)^2 \cdot t$$

NON AUTONOMA

Def. Un'eq. diff. si dice IN FORMA NORMALE se la derivata di ordine max. è stata "ricavata" rispetto al resto.

Più formalmente

$$\Phi(t, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0 \quad \rightsquigarrow \text{Eq. diff. generale}$$

$$u^{(k)} = F(t, u, u', \dots, u^{(k-1)}) \quad \rightsquigarrow \text{in forma normale}$$

Esempi $u'' = u^2 - t^2$ SI FORMA NORMALE

$$\dot{u} - 3u = \sin t \quad \text{QUASI FORMA NORM}$$

$$\rightsquigarrow \dot{u} = 3u + \sin t$$

$$t\dot{u} = 3u \quad \text{NI FORMA NORMALE}$$

$$\rightsquigarrow \dot{u} = \frac{3}{t} u \quad (\text{equivalente solo se } t \neq 0)$$

$$\dot{u}^3 = 3u \quad \text{QUASI} \quad \rightsquigarrow \dot{u} = \sqrt[3]{3u}$$

$$\dot{u}^{30} = 3u \quad \text{PROPRIO NO! non si riesce a ricavare } \dot{u}$$

1ª ISOLA Eq. diff. 1° ordine a VARIABILI SEPARABILI

Sono eq. del tipo

$$u'(t) = f(t) \cdot g(u(t))$$

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

Eq. di ordine 1 in forma normale in cui il RHS è prodotto di una funzione della sola t per una della sola u .

Oss. Primo ordine + forma norm. + autonoma
 $\Rightarrow$ variabili separabili

$$u' = g(u) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{1} \cdot g(u)$$

Eq. diff. lineari Sono eq. del tipo

$$\sum_{i=0}^k \underbrace{a_i(t)}_{\text{coeff.}} u^{(i)}(t) = \underbrace{f(t)}_{\text{termine forzante}}$$

I coeff. sono funzioni date definite su un intervallo $[a, b]$ comune
 La $f(t)$ idem

L'eq. si dice OMOGENEA se $f(t) \equiv 0$ e NON OMOG. altrimenti

Oss. Si può portare in forma normale pur di poter dividere
 per $a_k(t)$, che deve essere $\neq 0$.

Esempi

$$\underbrace{t^2}_{a_1(t)} u' + \underbrace{\sin t}_{a_0(t)} \cdot u = \underbrace{\log t}_{f(t)}$$

$$u' + t u^2 = 1$$

$\nwarrow$ colpevole della non linearità

Oss. Possiamo pensare al LHS come un'applicazione lineare

$$L: C^k([a,b]) \rightarrow C^0([a,b])$$

Risolvere l'eq. omogenea vuol dire trovare il ker di L .

2^a isola Eq. diff. lineari di ordine qualunque
a COEFFICIENTI COSTANTI omogenee e non omog.

Esempi

$$u' + 7u = \cos t$$

$$3u'' + 5u' - 6u = t^2$$

(il LHS è comb. line. di u e delle sue derivate con coeff. costanti)

3^a isola Eq. diff. lineari di ordine 1 generali che si possono mettere in forma normale

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Esempi

$$u' = tu \rightarrow \text{variabili separabili}$$

$$\rightarrow 3^{\text{a}} \text{ isola}$$

$$u' = u + t \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ isola}$$

$$\rightarrow 3^{\text{a}} \text{ isola}$$

$$\frac{u' - u}{Lu} = \frac{t}{\uparrow f(t)}$$

$$a(t) \equiv -1$$

$$b(t) = t$$

Prop. Se $u: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è sol. di un'eq. diff. autonoma, allora anche le sue traslate temporali $u(t+c)$ sono soluzioni della stessa equazione.

Esempio/dim

$$u'(t) = [u(t)]^2$$

$$u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Pongo

$$v(t) = u(t+2026)$$

$$v: [a-2026, b-2026] \rightarrow \mathbb{R}$$

Allora

$$v'(t) = u'(t+2026) = [u(t+2026)]^2 = [v(t)]^2$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 072

Note Title

26/02/2026

Esempio 1 $\ddot{u} = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$ Essendo autonoma, anche $u(t) = e^{t+c} = e^c \cdot e^t$ è soluzioneEssendo lineare e omogenea, anche $u(t) = c \cdot e^t$ è soluzione
↑
segno qualunque

Si può dimostrare che queste sono TUTTE le soluzioni.

Esempio 1 bis $\ddot{u} = \lambda u$ Si può dim. che tutte le sol. sono $u(t) = c \cdot e^{\sqrt{\lambda} t}$
↑
costante arbitrariaEsempio 2 $\ddot{u} + u = 0$ $\ddot{u} = -u$ $u(t) = \sin t$ e $u(t) = \cos t$ sono soluzioni

Essendo lin. e omog. anche

$$u(t) = a \sin t + b \cos t$$
↑ ↑
due param. liberi

è sol., e sono tutte (si può dim.)

Esempio 3 $\ddot{u} = -u^2$ Una sol. è $u(t) = \frac{1}{t}$ Un'altra soluz. è $u(t) \equiv 0$ Altre soluzioni sono $u(t) = \frac{1}{t+c}$ (autonoma!)

Sono tutte.

↑
param.
libero

PROBLEMA DI CAUCHY

Eq. diff. di ordine k + k condizioni iniziali che prescrivono il valore di u e delle sue prime $k-1$ derivate per uno stesso valore di t

Esempi $\ddot{u} = u$ $u(7) = 25$

$$\ddot{u} + u = 0$$

$$u(7) = 25$$

$$\dot{u}(7) = 34$$

(7 deve essere lo stesso sopra e sotto)

$$\ddot{u} + 5u = 0$$

$$u(7) = 25$$

$$u(8) = 25$$

↑
NO PROBLEMA DI CAUCHY

$$\ddot{u} + 5u = 0$$

$$u(7) = 25$$

$$\dot{u}(7) = 34$$

↑
NO pbm. di Cauchy

Idea generale: un'eq. di ordine k ha infinite soluzioni che dipendono da k parametri.

Quando impongo le cond. iniz. spero di trovare in modo univoco i valori dei parametri

Esempi $\dot{u} = 3u$ $u(0) = 5$

La sol. gen. è $u(t) = c e^{3t}$

$$u(0) = 5 \Rightarrow c = 5$$

Quindi $u(t) = 5e^{3t}$ è la sol. del pb. di Cauchy.

Teo. misterioso 1

↑
Teo. sola
esistenza

Consideriamo il pbm. di Cauchy per
un'eq. di ordine n in FORMA NORMALE.

Supponiamo che il RHS sia decente (funzione
continua).

Allora esiste almeno una soluzione

Teo. misterioso 2

↑
Teo. esistenza e
unicità

Stesse ipotesi di sopra.

Supponiamo che il RHS sia ancora meglio.

Allora la sol. è unica

ad esempio
derivabile

Precisazione Caso di ordine 1

$$u' = F(t, u)$$

L'ipotesi ancora meglio (detta male) è

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall t \quad \forall u_1 \quad \forall u_2 \quad |F(t, u_2) - F(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1|$$

non sto dicendo dove

(Lip. rispetto ad u unif. rispetto a t , cioè lo stesso L va
bene per ogni t)

Esempio 1 È importante il problema di Cauchy!

$$u'' + u = 0 \quad u(0) = 0 \quad u(\pi) = 27$$

La sol. generale è $u(t) = a \sin t + b \cos t$

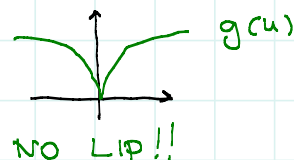
Se impongo $u(0) = 0$ resta $u(t) = a \sin t$ (viene $b = 0$)
e allora $u(\pi) = 27$ diventa impossibile $\wedge$

Se la seconda condizione era $u(\pi) = 0$, le sol. erano ∞ .

Esempio 2 (PENNELLO DI PEANO)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 3|u(t)|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

N.B. $g(u) = 3|u|^{\frac{2}{3}}$



Teo. esistenza $\Rightarrow$ almeno una soluzione c'è $\therefore$

ad esempio $u(t) \equiv 0$

Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$ (basta sostituire !!!)

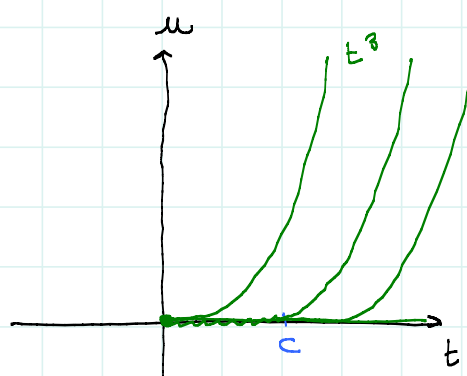
Quindi il p.b.m. di Cauchy ha ALMENO due sol. diverse

Le soluzioni sono in realtà INFINITE!!!

Un'altra soluzione è

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$

(basta sostituire!!)



Fenomeno alla PEANO: quando ho non unicità c'è sempre

$\rightarrow$ una sol. più piccola

$\rightarrow$ una sol. più grande

$\rightarrow$ per ogni p.to tra le 2 c'è una soluzione che ci passa

Esercizio Vedere cosa succede con

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{1-u^2} & \leftarrow \text{NON LIP.} \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

— o — o —

ANALISI 1 -

LEZIONE 073

Note Title

27/02/2026

EQUAZ. DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$$\dot{u} = f(t)g(u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

↑ ↑
numeri dati

Si può trovare "la" soluzione con questa procedura

- ① Separare
 - ② Integrare
 - ③ Ricavare
 - ④ Determino c usando la cond. iniz. $\leadsto$ sol. p.bm. Cauchy
 - ⑤ Verifica!
 - ⑥ Studiare la soluzione
- } soluz. gen. con un parametro libero c

Esempio 1 $\dot{u} = t \cdot u^2$ $u(0) = 5$

- ① Separare : tutte le u a sx, tutte le t a destra

$$\frac{du}{dt} = t \cdot u^2 \quad \leadsto \quad \frac{du}{u^2} = t \cdot dt$$

- ② Integrare : a sx risp. a u , a dx risp. a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t dt \quad \leadsto \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{2} t^2 + c$$

- ③ Ricavare : ricavo u in funzione di t

$$\frac{1}{u} = c - \frac{1}{2} t^2 \quad \leadsto \quad u = \frac{1}{c - \frac{1}{2} t^2} \quad \leadsto \quad u = \frac{2}{c - t^2}$$

$$u(t) = \frac{2}{c - t^2}$$

Sol. generale dell'equazione

④ Ricavo c $5 = u(0) = \frac{2}{c} \rightsquigarrow c = \frac{2}{5}$

$$u(t) = \frac{2}{\frac{2}{5} - t^2} \rightsquigarrow \boxed{u(t) = \frac{10}{2 - 5t^2}}$$

⑤ Verifico (eq. e dato iniziale) $t = 0 \rightsquigarrow u(0) = 5 \quad \checkmark$

$$u'(t) = -\frac{10}{(2-5t^2)^2} (-10t) = \frac{100}{(2-5t^2)^2} \cdot t = u(t)^2 \cdot t \quad \checkmark$$

⑥ Studio della soluzione

Cosa interessa: $\rightarrow$ intervallo massimale di esistenza

$\rightarrow$ LIFE SPAN (tempo di vita, nel futuro e nel passato)

$\rightarrow$ tipo di morte

Def. Si dice int. max di esistenza il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene il tempo iniziale

Si dice LIFE SPAN nel futuro il sup dell'int. max esistenza
passato e' inf ...

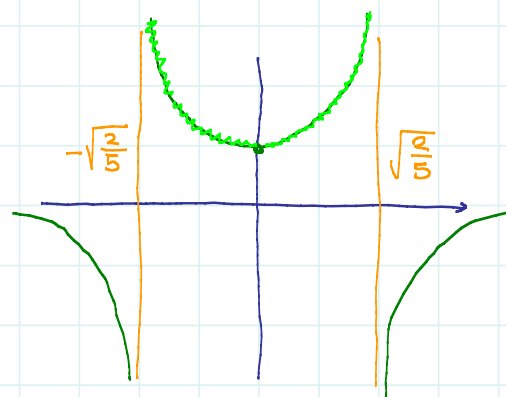
Nell'esempio: $u(t) = \frac{10}{2-5t^2}$, definita per $t \neq \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\frac{-\sqrt{\frac{2}{5}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{2}{5}}}{\text{-----}}$$

$\uparrow$ tempo iniziale

Int. max esistenza: $(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}})$

LIFE SPAN nel futuro: $\sqrt{\frac{2}{5}}$



Nel futuro ci sono 3 possibilità. Sia T il L.S. nel futuro

→ $T = +\infty$ (esistenza globale nel futuro)

→ BLOW UP : $T < +\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty \quad \left[\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty \right]$$

→ BREAK DOWN (rottura) $T < +\infty$ e $u(t)$ esce dalla zona in cui il RHS dell'equazione ha senso.

Spesso (ma non sempre) questo si traduce in

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

Nel vostro caso : la soluzione ha blow up per $T = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Esempio 1-bis $\dot{u} = u^2 t$ $u(0) = 0$

Alla fine del ③ mi ritrovo $u(t) = \frac{2}{c - t^2}$

④ Ricavo c : $0 = \frac{2}{c}$ ☹

In questo la soluzione è banalmente $u(t) \equiv 0$, con esistenza globale nel passato e nel futuro.

Esempio 2 $\dot{u} = -\frac{t^2}{u}$ $u(0) = 5$

① $\frac{du}{dt} = -\frac{t^2}{u} \rightsquigarrow u du = -t^2 dt$

② $\int u du = -\int t^2 dt \rightsquigarrow \frac{1}{2} u^2 = -\frac{1}{3} t^3 + c$

③ $u^2 = -\frac{2}{3} t^3 + c \rightsquigarrow u(t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{3} t^3 + c}$

④ Assuolo $u(0) = 5$, scelgo segno +

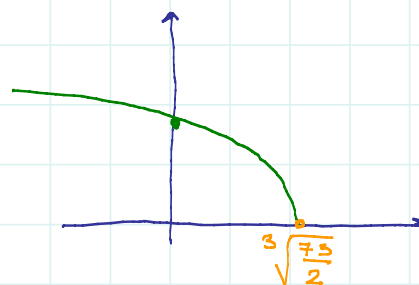
$$5 = \sqrt{c} \leadsto c = 25 \leadsto u(t) = \sqrt{25 - \frac{2}{3}t^3} \text{ soluz.}$$

⑤ Verifica: $u(0) = 5 \checkmark$ Eq. ok (fare conto)

⑥ Studio: definita quando $25 - \frac{2}{3}t^3 \geq 0$, cioè $t^3 \leq \frac{75}{2}$,

cioè per $t \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{75}{2}}\right)$
int. massima
di esistenza ← LIFE SPAN

Nel passato c'è esistenza globale



Nel futuro c'è break down in $t = \sqrt[3]{\dots}$

Nota bene: $u(t)$ esce dalla zona in cui RHS ha senso e

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = -\infty$$

Esempio 3 $\ddot{u} = \frac{u}{t} \quad u(1) = 5$

La soluzione è $u(t) = 5t$ (verifica diretta)

Int. massima di esistenza: $(0, +\infty)$ ($t=0$ non è ammesso)

Nota bene: anche $u(t) = \begin{cases} 5t & \text{per } t \geq 0 \\ -7t & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$

è soluzione...

Esempio 4

$$\dot{u} = 5u$$

$$u(0) = 8$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{du}{dt} = 5u \quad \rightsquigarrow \quad \frac{du}{u} = 5 dt$$

$$\textcircled{2} \quad \int \frac{du}{u} = \int 5 dt \quad \rightsquigarrow \quad \log |u| = 5t + c$$

$$\textcircled{3} \quad |u| = e^{5t+c} = e^c \cdot e^{5t} \quad \rightsquigarrow \quad u(t) = \pm e^c \cdot e^{5t}$$

$$u(t) = k \cdot e^{5t}$$

↑
k generico, anche nullo

Back to esempio 1

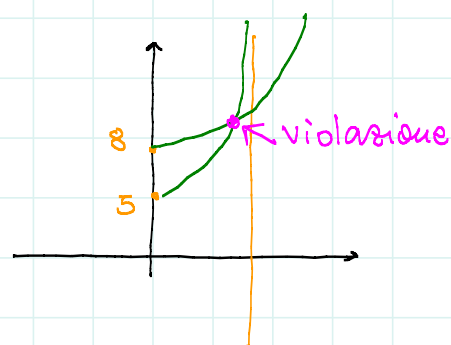
$$\dot{u} = u^2 t$$

$$u(0) = 5$$

$\rightsquigarrow$ blow up in $t = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\dot{u} = u^2 t \quad u(0) = 8$$

Se visse di più, la incontrerebbe,
producendo una violazione di unicità
— 0 — 0 —



ANALISI 1

-

LEZIONE 074

Note Title

27/02/2026

$$\dot{u} = f(t) g(u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

Teorema debole 1 Supponiamo f e g continue e $g(u_0) \neq 0$

Allora quella data dalla procedura è l'unica soluzione possibile

Oss. 1 Non ci sono ipotesi di Lip., ma l'eq. è speciale e sto assumendo $g(u_0) \neq 0$.

Oss. 2 Se $g(u_0) = 0$, allora $u(t) \equiv u_0$ è di sicuro soluzione e potrebbe essere non unica (vedi teorema di Peano)

Dim Supponiamo $f: [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($\delta_0 > 0$)
 Supponiamo $g: [u_0 - r, u_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$ continua ($r > 0$)
 Supponiamo $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1
 e soluzione dell'equazione per ogni $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$
 ($0 < \delta_1 \leq \delta_0$).

Osservo che $g(u(t)) \neq 0$ per $t = t_0$ (per ipotesi)

Quindi, a meno di prendere un δ_1 più piccolo posso supporre

$$g(u(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1].$$

Dall'eq. sappiamo che

$$u'(t) = f(t) \cdot g(u(t)) \quad \forall t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$$

Dividendo

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t)$$

Per ogni $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ posso integrare su $[t_0, t]$

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

$$\Gamma(u(t)) - \Gamma(\underbrace{u(t_0)}_{u_0}) \quad F(t) - F(t_0) \quad \text{dove } F \text{ è una primitiva di } f$$

dove Γ è una primitiva di $\frac{1}{g}$

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \text{pongo } y = u(s) \rightsquigarrow dy = u'(s) ds$$

$$s = t_0 \rightsquigarrow y = u(t_0)$$

$$s = t \rightsquigarrow y = u(t)$$

$$= \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{dy}{g(y)} = \Gamma(u(t)) - \Gamma(u(t_0))$$

Conclusione: $\Gamma(u(t)) = F(t) + \boxed{\Gamma(u_0) - F(t_0)}$

"C"

Questo è il risultato che si otteneva con la procedura!

— o — o —

Oss. Quello che abbiamo davvero di u è questo:

se c'è una soluzione, allora è quella data dalla procedura (e quindi unica) finché $g(u(t)) \neq 0$.

Dopo non c'è certezza (Peano docet).

Teorema debole 2 Stesse ipotesi di prima, compreso $g(u_0) \neq 0$. Allora quella data dalla procedura è davvero una soluzione. (quindi teorema di esistenza)

Dim Sia F una primitiva di f
Sia Γ una primitiva di $\frac{1}{g}$ (definita dove $g \neq 0$)
Pongo

$$u(t) = \Gamma^{-1} (F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0))$$

Dando per buona l'esistenza di Γ^{-1} , che proprietà ha la funzione $u(t)$?

$$u(t_0) = \Gamma^{-1}(\Gamma(u_0)) = u_0 \quad \text{c}$$

$$u'(t) = \frac{F'(t)}{\Gamma'(\Gamma^{-1}(F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0)))}$$

$$= f(t) \cdot g(\Gamma^{-1}(F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0)))$$

$$= f(t) \cdot g(u(t)) \quad \text{c}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\Gamma^{-1}(x)) &= x \\ \Gamma'(\Gamma^{-1}(x)) [\Gamma^{-1}]'(x) &= 1 \\ [\Gamma^{-1}]'(x) &= \frac{1}{\Gamma'(\Gamma^{-1}(x))} \end{aligned}$$

Perché è invertibile Γ ? È la primitiva di $\frac{1}{g}$, che è $\neq 0$ (quindi sempre > 0 o sempre < 0) in tutto un intorno di u_0 , quindi strett. monotona.

Conseguenza: pu di scegliere bene partenza ed arrivo, Γ è invertibile.

Ora l'argomento $F(t) + \Gamma(u_0) - F(t_0)$ sta nella zona di invertibilità quando $t = t_0$, quindi anche per t vicini a t_0 .

Qui si decide il LIFE SPAN.

— 0 — 0 —

Esempio 1 $u'' = u^3 \sin t$ $u(0) = \alpha$

Domanda: per quali α ho esistenza globale?

$$\frac{du}{dt} = u^3 \sin t \quad \rightsquigarrow \quad \frac{du}{u^3} = \sin t \, dt$$

$$\int \frac{du}{u^3} = \int \sin t \, dt \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = -\cos t + c \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{u^2} = 2\cos t + c$$

$$u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{c + 2\cos t}}$$

Trovo c in funzione di α : $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{c+2}}$

$$\alpha^2 = \frac{1}{c+2} \quad \leadsto \quad c = \frac{1}{\alpha^2} - 2$$

$$u(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-2\alpha^2+2\alpha^2\cos t}}$$

Verifica! (Funziona anche per $\alpha=0$)

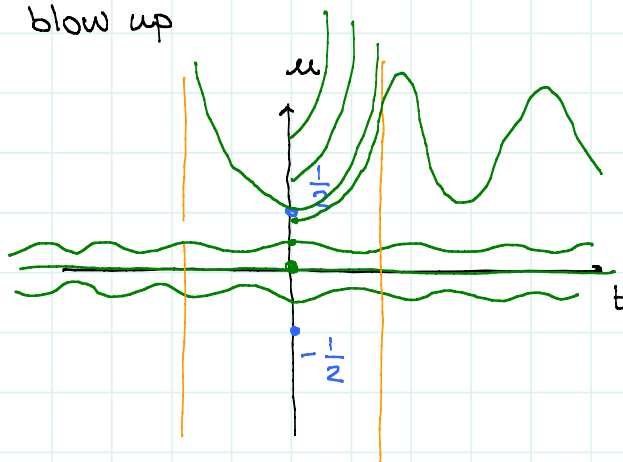
Per quali α c'è esistenza globale? Deve succedere

$$1-2\alpha^2+2\alpha^2\cos t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora

$$1-2\alpha^2+2\alpha^2\cos t \geq 1-4\alpha^2 \quad \text{e questo è } > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$$

EFFETTO SOGLIA: sotto la soglia esistenza globale
sopra blow up



ANALISI 1 - LEZIONE 075

Note Title

02/03/2026

Eq. Diff. Lineari OMOGENEE

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = 0$$

dove $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sono i coeff. dell'equazione.

Fatto mist. 1 Perché si possa portare in forma normale, cioè se

$$a_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

la soluzione esiste su tutto $[a, b]$.

(per un'eq. lin., la sol. esiste finché può)

Fatto mist. 2 Nelle ipotesi di sopra, l'unica soluzione con dati di Cauchy tutti nulli è $u(t) \equiv 0$.

Oss. Risolvere l'eq. vuol dire trovare il ker dell'applicazione lineare

$$Lu := \sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t)$$

pensata come $L : C^k([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$

[Si tratta solo di verificare che L è lineare, cioè

$$L(u+v) = Lu + Lv$$

$$\forall u, v \in [C^k([a, b])]^2$$

$$L(cu) = cLu$$

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \forall u \in C^k([a, b])]$$

Teorema Nelle solite ipotesi (forma normale) l'insieme delle soluzioni è uno sp. vett. di dimensione k .

(quindi i k parametri liberi compaiono come coeff. di una combinazione lineare)

Dim. Che è sp. vett. è ovvio perché è un ker.

Devo esibire una base $u_1(t), \dots, u_k(t)$.

Fisso $t_0 \in [a, b]$ e definisco $u_i(t)$ come la sol. dell'eq. con dati di Cauchy

$$u_i^{(j)}(t_0) = \delta_{i,j+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{se } j \neq i-1 \end{cases}$$

Per il fatto mist. 1 questa soluzione esiste in tutto $[a, b]$.

Sono generatori Prendiamo una qualunque altra soluzione $u(t)$. Questa avrà i suoi dati di Cauchy

$$u^{(j)}(t_0) = c_{j+1} \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1$$

Dico che

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_k u_k(t)$$

Basta osservare che $u(t) - \text{RHS}$ è ancora una soluzione dell'equazione e in t_0 si annulla insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $k-1$.

Per il fatto misterioso 2, la differenza è $\equiv 0$, quindi u è comb. lineare di $u_1(t), \dots, u_k(t)$.

Sono lin. indip. Supponiamo che una comb. lin. sia $\equiv 0$, cioè

$$v(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Ora basta osservare che

$$0 = v^{(j)}(t_0) = \sum_{i=1}^k c_i u_i^{(j)}(t_0) = c_{j+1} \quad \forall j = 0, \dots, k-1$$

e quindi tutti i coeff. sono nulli.

— 0 — 0 —

Operativamente Se voglio sol. gen. di un'eq. diff. l'u. omog. in forma normale, basta trovare una base

Nel caso in cui i coeff. sono costanti, c'è un algoritmo per trovare UNA base

$$\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)} = 0$$

WLOG posso supporre $a_k = 1$

Caso $k=1$ $\ddot{u} + a_0 u = 0$

$$u(t) = \underbrace{c}_{\text{param.}} \cdot \underbrace{e^{-a_0 t}}_{\text{unico el. della base}}$$

Caso $k=2$ $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$

Si considera il polinomio caratteristico $x^2 + ax + b = 0$

A seconda delle radici si aprono 3 scenari.

Due radici reali distinte λ e μ Una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$
quindi la sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

Dim Basta sostituire! $u(t) = e^{\lambda t}, \dot{u}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \ddot{u}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = e^{\lambda t} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$

Una base è $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

Dim Basta sostituire anche qui!

Emistica: seguendo la logica del caso precedente, una soluzione sarebbe stata

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Due radici reali coincidenti Radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità 2

Una base è $e^{\lambda t}$ $t e^{\lambda t}$

Dim Basta sostituire! [Fatto per esercizio]

Emistica: quando sono reali e distinte una base è $e^{\lambda t}$, $e^{\mu t}$.
Un'altra base è

$$e^{\lambda t} \quad \frac{e^{\mu t} - e^{\lambda t}}{\mu - \lambda}$$

Ora il secondo è $e^{\lambda t} \frac{e^{(\mu - \lambda)t} - 1}{\mu - \lambda}$

↓
t quando $\mu \rightarrow \lambda$

— 0 — 0 —

Lo stesso algoritmo funziona per eq. di ordine k . Si passa al polinomio caratteristico, il quale ha k radici con molteplicità. Queste producono k el. della base

- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. 1 $\rightsquigarrow e^{\lambda t}$
- ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 $\rightsquigarrow e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- ogni radice $\lambda \in \mathbb{R}$ di molt. m $\rightsquigarrow e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, ..., $t^{m-1} e^{\lambda t}$
- ogni coppia $\alpha \pm i\beta$ di molt. m $\rightsquigarrow$ soliti due elementi e gli stessi molt. per t , ..., t^{m-1}

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 076

Note Title

02/03/2026

Oss. Perché e^{at} , e^{bt} , e^{ct} sono lin. indip.? Se a, b, c sono distinti

Considero $v(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{bt} + c_3 e^{ct}$

$$v(0) = 0 \rightsquigarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$\dot{v}(0) = 0 \rightsquigarrow ac_1 + bc_2 + cc_3 = 0$$

$$\ddot{v}(0) = 0 \rightsquigarrow a^2 c_1 + b^2 c_2 + c^2 c_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

↑ VANDERMONDE

$\text{Det} \neq 0 \Rightarrow$ l'unica sol. è $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow \ddot{v}$

Esercizio 1 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = 0$

$$\rightsquigarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \rightsquigarrow x = -2 \text{ e } x = -3 \rightsquigarrow u(t) = ae^{-2t} + be^{-3t}$$

Esercizio 2 $\ddot{u} + 6\dot{u} + 13u = 0$

$$\rightsquigarrow x^2 + 6x + 13 = 0 \rightsquigarrow x = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm 2i$$

$$u(t) = ae^{-3t} \cos(2t) + be^{-3t} \sin(2t)$$

Esempio 3 $\ddot{u} + 4u = 0 \quad \ddot{u} = -4u$

$$\rightsquigarrow x^2 + 4 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 2i \rightsquigarrow \text{base: } e^{0t} \cdot \cos(2t), e^{0t} \cdot \sin(2t)$$

$$u(t) = a \cos(2t) + b \sin(2t)$$

Esempio 4 $\ddot{u} - 4u = 0$

$$\leadsto x^2 - 4 = 0 \leadsto x = \pm 2 \leadsto u(t) = a e^{2t} + b e^{-2t}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 base base

Un'altra base è $\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$, $\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$

Quindi posso scrivere $u(t) = a \cosh(2t) + b \sinh(2t)$

Esempio 5 $\ddot{u} + 4\dot{u} = 0$

$$\leadsto x^2 + 4x = 0 \leadsto x = 0 \text{ e } x = -4 \leadsto u(t) = a + b e^{-4t}$$

Esempio 6 $u^{(4)} - 4u = 0$

$$x^4 - 4 = 0 \leadsto x = \pm\sqrt{2} \text{ e } x = \pm\sqrt{2}i$$

$$u(t) = a \cos(\sqrt{2}t) + b \sin(\sqrt{2}t) + c \cosh(\sqrt{2}t) + d \sinh(\sqrt{2}t)$$

Esempio 7 $u^{(4)} + 9u'' = 0$

$$x^4 + 9x^2 = 0 \leadsto x^2(x^2 + 9) = 0 \leadsto x = \pm 3i \quad \begin{matrix} e^{3it}, b.e^{3it} \\ \uparrow \\ x=0 \text{ di mult. 2} \end{matrix}$$

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t) + c + dt$$

Esempio 8 $u^{(4)} + 2u'' + u = 0$

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \leadsto (x^2 + 1)^2 = 0 \leadsto x = \pm i \text{ con mult. } = 2$$

$$u(t) = a \cos t + b \sin t + ct \cos t + dt \sin t$$

Eq. Diff. Lin. NON omogenee

$$\sum_{i=0}^k a_i(t) u^{(i)}(t) = f(t)$$

$$Lu = f$$

Ancora una volta le soluz. esistono sull'intervallo comune in cui sono def. i coeff. ed il termine forzante $f(t)$,

La soluzione generale è del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{sol. qualunque dell'eq. non omog.}}} + \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{\substack{\uparrow \text{ sol. generale eq. omogenea} \\ \text{corrispondente}}}$$

[Caso particolare di enunciato per applic. lin. generiche]

Come trovo una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$?

Ci sono due metodi

- provare a indovinare (comodo ma poco sistematico)
- metodi di variazione delle costanti (funziona sempre, ma sono tanti casi)

Esempio 1 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^t$

Cerco $\bar{u}(t) = ae^t$. Sostituisco $\bar{u}'(t) = ae^t = \bar{u}''(t)$

$$ae^t + 5ae^t + 6ae^t = e^t \quad \leadsto \quad 12ae^t = e^t \quad \leadsto \quad a = \frac{1}{12}$$

sol. gen. $u(t) = \frac{1}{12}e^t + \underbrace{ae^{-2t} + be^{-3t}}_{\text{parte omog.}}$

Esempio 2 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{2t}$

$$\bar{u}(t) = ae^{2t} \quad \bar{u}'(t) = 2ae^{2t} \quad \bar{u}''(t) = 4ae^{2t}$$

$$(4a + 10a + 6a)e^{2t} = e^{2t} \rightsquigarrow a = \frac{1}{20} \rightsquigarrow \text{come prima}$$

Esempio 3 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = e^{-2t}$

Vorrei tanto provare $\bar{u}(t) = ae^{-2t}$... ma è soluzione dell'omog. quindi per forza $L\bar{u} = 0$.

Come se ne esce?

Provo con $\bar{u}(t) = ate^{-2t}$. Sostituisco

$$\bar{u}'(t) = ae^{-2t} - 2ate^{-2t}$$

$$\bar{u}''(t) = -2ae^{-2t} - 2ae^{-2t} + 4ate^{-2t}$$

$$\underbrace{-4ae^{-2t} + 4ate^{-2t}}_{\ddot{u}} + \underbrace{5ae^{-2t} - 10ate^{-2t}}_{+ 5\dot{u}} + \underbrace{6ate^{-2t}}_{+ 6u} = e^{-2t}$$

Le parti con la t se ne sono andate. Doveva succedere!

Infatti sono t . quello che succedeva sostituendo e^{-2t}

Resta $ae^{-2t} = e^{-2t} \rightsquigarrow a = 1$

La sol. generale è

$$u(t) = te^{-2t} + ae^{-2t} + be^{-3t}$$

Oss. Se e^{-2t} e te^{-2t} erano sol. dell'omog., allora il tentativo da fare era

$$\bar{u}(t) = at^2e^{-2t}$$

(slogan: t finché basta!)

Esempio 4 $\ddot{u} + 5\dot{u} + 6u = t^2 + \sin(2t)$

1ª osserv. Basta risolvere separatamente

$$L\bar{u}_1 = t^2 \quad L\bar{u}_2 = \sin(2t)$$

e poi prendere $\bar{u}_1 + \bar{u}_2$

Per ottenere t^2 provo con $\bar{u}(t) = \underline{at^2 + bt + c}$
pol. gen. dello STESSO grado

$$\bar{u}'(t) = 2at + b \quad \bar{u}''(t) = 2a$$

Sostituisco:

$$2a + 5(2at + b) + 6(at^2 + bt + c) = t^2$$

$$2a + \underline{10at} + 5b + \underline{6at^2} + \underline{6bt} + 6c = \underline{t^2}$$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 10a + 6b = 0 \\ 2a + 5b + 6c = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare TRIANGOLARE, quindi
di sicuro si risolve

Per ottenere $\sin(2t)$ provo con $\bar{u}(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t)$
e sostituendo trovo un sistema lineare in a e b .

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 077

Note Title

04/03/2026

Eq. Diff. Lin. NON OMOG

$$Lu = f(t)$$

Problema: come trovo una soluzione qualunque $\bar{u}(t)$.

Tecniche

→ Provare a indovinare

→ Variazione delle costanti (funziona sempre, anche se l'eq. non è a coeff. costanti)

Esempio 1 $u'' - 2u' - 3u = e^{2t}$

Metodo classico: $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x=3 \text{ e } x=-1$

Tentativo: $\bar{u}(t) = ae^{2t} \quad \bar{u}'(t) = 2ae^{2t} \quad \bar{u}''(t) = 4ae^{2t}$

$$4ae^{2t} - 4ae^{2t} - 3ae^{2t} = e^{2t} \quad a = -\frac{1}{3}$$

La soluzione generale è

$$u(t) = -\frac{1}{3}e^{2t} + ae^{-t} + be^{3t}$$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Cerco

$$\bar{u}(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{3t}$$

(ora $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni incognite)

$$\bar{u}'(t) = \underline{a'(t)e^{-t}} - a(t)e^{-t} + \underline{b'(t)e^{3t}} + 3b(t)e^{3t}$$

Impongo che la somma dei termini con $a'(t)$ e $b'(t)$ si annulli

$$a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{3t} = 0$$

1ª equazione

$$\bar{u}''(t) = -a'(t)e^{-t} + a(t)e^{-t} + 3b'(t)e^{3t} + 9b(t)e^{3t}$$

(non derivo i due termini la cui somma ho imposto = 0)

Sostituisco nell'equazione

$$\begin{aligned} & -a'(t)e^{-t} + a(t)e^{-t} + 3b'(t)e^{3t} + 9b(t)e^{3t} \\ & + 2a(t)e^{-t} - 6b(t)e^{3t} \\ & - 3a(t)e^{-t} - 3b(t)e^{3t} \\ & = e^{2t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \bar{u}'' \\ & -2\bar{u}' \\ & -3\bar{u} \\ & = e^{2t} \end{aligned}$$

DEVE succedere che i termini con $a(t)$ e $b(t)$ non derivati se ne vanno.

[Infatti sono uguali ad $a(t)$ · equazione calcolata in e^{-t}
 $b(t)$ · e^{3t}]

$$\boxed{-a'(t)e^{-t} + 3b'(t)e^{3t} = e^{2t}} \quad 2^a \text{ equazione}$$

Le due equazioni sono un sistema di cui in $a'(t)$ e $b'(t)$ che posso risolvere

$$\begin{cases} a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{3t} = 0 \\ -a'(t)e^{-t} + 3b'(t)e^{3t} = e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{Sommo: } 4b'(t) = e^{2t} \rightsquigarrow 4b'(t)e^{3t} = e^{2t} \rightsquigarrow b'(t) = \frac{1}{4}e^{-t} \rightsquigarrow b(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}$$

$$\begin{aligned} 1^a \text{ eq. } \rightsquigarrow a'(t)e^{-t} &= -b'(t)e^{3t} = -\frac{1}{4}e^{2t} \rightsquigarrow a'(t) = -\frac{1}{4}e^{3t} \\ \rightsquigarrow a(t) &= -\frac{1}{12}e^{3t} \end{aligned}$$

Conclusione:

$$\bar{u}(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{3t} = -\frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} = -\frac{1}{3}e^{2t} \quad \text{😊}$$

Eq. Diff. Lineari 1° ordine generali

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Soluzione generale è data da

$$u(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(s)} b(s) ds$$

↑ primitiva qualunque di $e^{A(s)} b(s)$

dove $A'(t) = a(t)$ (primitiva qualunque)

Se ho la condizione di Cauchy $u(t_0) = u_0$, allora la soluzione è

$$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds$$

dove $A(t)$ è la primitiva di $a(t)$ che si annulla in t_0 e anche il secondo integrale ha gli estremi e si annulla in t_0 .

Dim Derivare e sostituire : (farlo per esercizio)

Euristica 1 $u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$

Moltiplico a dx e sx per $e^{A(t)}$ **FATTORE INTEGRANTE**

$$u'(t)e^{A(t)} + u(t) \cdot a(t)e^{A(t)} = e^{A(t)} b(t)$$

$$[u(t)e^{A(t)}]' = e^{A(t)} b(t)$$

$$\Rightarrow u(t)e^{A(t)} = \int e^{A(s)} b(s) ds + c$$

A questo p.to basta portare $e^{A(t)}$ al RHS.

Emistica 2

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t)$$

Basta risolvere l'omogenea e poi cercare soluzione $\bar{u}(t)$ della non omogenea.

Omogenea : $u'(t) + a(t)u(t) = 0 \rightsquigarrow u'(t) = -a(t)u(t)$

Questa è a variabili separabili

$$\frac{du}{dt} = -a(t)u(t) \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -a(t)dt \rightsquigarrow \log|u| = -A(t) + c$$

$$|u(t)| = e^{-A(t)+c} \rightsquigarrow u(t) = c e^{-A(t)} \quad [\text{verifica}]$$

Non omogenea : cerco $\bar{u}(t) = c(t) e^{-A(t)}$ (variazione delle costanti)

$$\bar{u}'(t) = c'(t) e^{-A(t)} - c(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco nell'equazione

$$\bar{u}'(t) + a(t)\bar{u}(t) = c'(t) e^{-A(t)} - \cancel{c(t)a(t)e^{-A(t)}} + \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}} = b(t)$$

$$\rightsquigarrow c'(t) = e^{A(t)} b(t) \rightsquigarrow c(t) = \int e^{A(s)} b(s) ds$$

$$\rightsquigarrow \bar{u}(t) = e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds$$

Isda 3-bis

Eq. BERNOULLI

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)[u(t)]^k$$

Si riduceva immediatamente al 3 con un cambio di variabili

Esempio 1 $u' = tu + \arctan t \cdot u^3$

Divido per u^3 : $\frac{u'}{u^3} = t \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{\frac{1}{v}} + \arctan t$

Pongo $v(t) = \frac{1}{u(t)^2}$ $\leadsto v'(t) = -2 \frac{u'(t)}{u(t)^3} \leadsto \frac{u'}{u^3} = -\frac{1}{2} v'$

e quindi $-\frac{1}{2} v' = tv + \arctan t \leadsto 3^a \text{ sola}$

Esempio 2 $u' = t^2 u + \frac{\sin t}{u^4}$

$$u^4 u' = t^2 u^5 + \sin t$$

$$v = u^5 \quad v' = 5u^4 u' \leadsto \frac{1}{5} v' = t^2 v + \sin t \leadsto \ddot{}$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 078

Note Title

04/03/2026

Eq. Diff. Lineari coeff. costanti non omogenee . Tentativi ragionevoli

$$Lu = f(t)$$

$$f(t)$$

$$e^{\alpha t}$$

$$\sin(\alpha t)$$

$$\cos(\alpha t)$$

pol. $p(t)$ grado k

$$p(t) e^{\alpha t}$$

$$p(t) \sin(\alpha t)$$

$$p(t) \cos(\alpha t)$$

$$\sin^7(\alpha t)$$

$$\bar{u}(t)$$

$$a e^{\alpha t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha t) \\ \cos(\alpha t) \end{array} \right\} a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)$$

polinomio COMPLETO dello stesso grado

$$q(t) e^{\alpha t}$$

↑ pol. completo con stesso grado

$$q(t) (a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t))$$

$$q_1(t) \sin(\alpha t) + q_2(t) \cos(\alpha t)$$

↑ pol. completi dello stesso grado

↪ si scrive come comb. lineare di

sin e cos senza esponenti (precorso)

Fatto generale: ogni prodotto di funzioni trigonometriche diventa una somma (product → sum)

Se $f(t)$ è già sol. dell' omogenea, si cambia il tentativo mettendo delle t finché basta.Esempio 1

$$u' + 3u = 5$$

↪ variabili separabili

↪ lin. coeff. cost.

↪ lin. 1° ordine

Provarli tutti e vedere cosa succede

$$u(t) = \underbrace{c \cdot e^{-3t}}_{\substack{\uparrow \\ \text{parte} \\ \text{omog.}}} + \frac{5}{3} \quad \uparrow \bar{u}(t)$$

Esempio 2 $u'(t) + \frac{\sin t}{a(t)} \cdot u(t) = \frac{\sin(2t)}{b(t)}$

Seguiamo il proced. del FATTORE INTEGRANTE

$$A(t) = -\cos t \quad \text{Fatt. int. : } e^{-\cos t}$$

$$u' e^{-\cos t} + u \sin t \cdot e^{-\cos t} = \sin(2t) e^{-\cos t}$$

$$= (u e^{-\cos t})' = \sin(2t) e^{-\cos t}$$

$$u(t) e^{-\cos t} = \int \sin(2t) e^{-\cos t} dt = 2 \int \sin t \cdot \cos t \cdot e^{-\cos t} dt$$

pongo $s = \cos t$
 $ds = -\sin t \cdot dt$

$$= -2 \int s e^{-s} ds = -2 [-s e^{-s} + \int e^{-s} ds]$$

$$= 2s e^{-s} + 2e^{-s} = 2(\cos t + 1) e^{-\cos t} + c$$

Verifica ok!

Conclusione

$$u(t) = c e^{\cos t} + 2\cos t + 2 \quad \leftarrow \text{Verifica}$$

Esempio 3 $u'(t) + t u(t) = t^3$

1° modo Fattore integrante: $A(t) = \frac{t^2}{2}$ $e^{A(t)} = e^{\frac{t^2}{2}}$

$$e^{\frac{t^2}{2}} \cdot u' + t e^{\frac{t^2}{2}} u = t^3 e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$[e^{\frac{t^2}{2}} u]' = t^3 e^{\frac{t^2}{2}} = t \cdot t^2 e^{\frac{t^2}{2}}$$

pongo $s = \frac{t^2}{2}$ e si
 integra

2° modo Omogenea + tentativo. Omogenea $\leadsto c e^{-\frac{t^2}{2}}$
 $u' = -t u$

Tentativo: $\bar{u}(t) = at^2 + bt + c$ $\bar{u}'(t) = 2at + b$

$$\bar{u}'(t) + t\bar{u}(t) = 2at + b + at^3 + bt^2 + ct = t^3$$

$$\leadsto a=1 \leadsto b=0 \leadsto c=-2a=-2$$

$$\leadsto u(t) = t^2 - 2 + ce^{-\frac{t^2}{2}}$$

Esempio 3bis $u'(t) + tu(t) = t^2$

Provo $\bar{u}(t) = at + b \leadsto a + at^2 + bt = t^2 \quad \therefore$

Morale: con le potenze dispari funziona, con quelle pari no

Esempio 4 $u'(t) + \frac{u(t)}{t+1} = t^3$

$$a(t) = \frac{1}{t+1} \leadsto A(t) = \log|t+1| \leadsto e^{A(t)} = t+1$$

$\therefore \leadsto$ potevo da subito moltiplicare per $t+1$!!

$$(t+1)u'(t) + u(t) = t^3(t+1) \\ = [(t+1)u(t)]'$$

$$(t+1)u(t) = \int t^3(t+1)dt + c = \int (t^4 + t^3)dt + c \\ = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + c$$

$$u(t) = \frac{c}{t+1} + \frac{1}{t+1} \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 \right)$$

Questa è definita per $t > -1$ o per $t < -1$ a seconda del t_0 iniziale

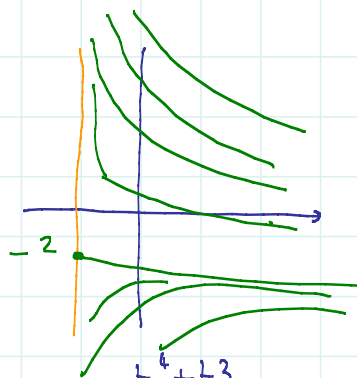
Come si comporta quando $t \rightarrow -1^+$?

Dipende da c !

- Se $c + \frac{1}{20} > 0$, allora $\rightarrow +\infty$
- Se $c + \frac{1}{20} < 0$, allora $\rightarrow -\infty$
- Se $c = -\frac{1}{20}$, allora

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{-\frac{1}{20} + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4}{t+1} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{t^4 + t^3}{1} = -2$$

in realtà 0
[Corretto dopo video]



Esempio 5 $\dot{u} = \frac{7u}{t}$ $u(1) = 3$

Variabili separabili $\frac{du}{u} = \frac{7}{t} dt \leadsto \log |u| = 7 \log |t| + c$

$$\leadsto u(t) = k \cdot t^7 \quad (\text{verifica}) \leadsto \boxed{u(t) = 3t^7}$$

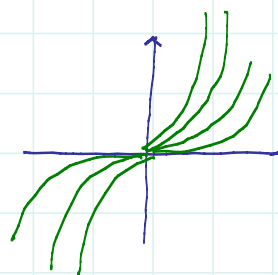
Int. massimale di esistenza ? $(0, +\infty)$

Se scrivo l'eq. come $t u'(t) = 7u(t)$?

Non è in forma normale, quindi comunque qualcosa va storto

$$u(t) = \begin{cases} 3t^7 & \text{per } t \geq 0 \\ 8t^7 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

è una sol. di classe C^0 dell'eq.



— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 079

Note Title

05/03/2026

Esercizio 1

$$u'' + \lambda u = 0$$

Determinare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ succede che tutte le sol. sono limitate.

$$x^2 + \lambda = 0 \quad \text{tutto dipende dal segno di } \lambda$$

$$\boxed{\lambda < 0} \quad x^2 = -\lambda \leadsto \text{due sol. reali} \quad x = \pm \sqrt{-\lambda}$$

$$u(t) = a e^{\sqrt{-\lambda} t} + b e^{-\sqrt{-\lambda} t}$$

Se a oppure b sono $\neq 0$, allora $u(t)$ non è limitata per $t \rightarrow +\infty$ oppure $t \rightarrow -\infty$. L'unica possibilità è $a = b = 0$.

$$\boxed{\lambda > 0} \quad x = \pm \sqrt{\lambda} i \quad \text{complesse coniugate}$$

$$u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t) \quad \text{sempre limitata}$$

La soluzione si può sempre scrivere come $u(t) = A \sin(\sqrt{\lambda} t + \varphi)$
↑ ↑
ampiezza fase

$$u(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cos(\dots) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \sin(\dots) \right\}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\sqrt{\lambda} t + \varphi)$$

$$\boxed{\lambda = 0} \quad x^2 = 0 \leadsto x = 0 \text{ di mult.} = 2$$

$$u(t) = a + bt$$

Le uniche sol. limitate sono le costanti

Esercizio 2 (TACOMA - ALTALENA)

$$\ddot{u} + 16u = \sin(\alpha t)$$

Domanda: le soluzioni sono limitate?

Parte omogenea: $u(t) = a \cos(4t) + b \sin(4t)$

Sol. speciale: la cerco del tipo $\bar{u}(t) = c \sin(\alpha t) + d \cos(\alpha t)$
 purché $\alpha \neq 4$

Se $\alpha \neq 4$, la soluzione sarà qualcosa di limitato

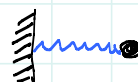
Se $\alpha = 4$, la sol. la cerco $\bar{u}(t) = t(c \sin(4t) + d \cos(4t))$
 $= t A \sin(4t + \varphi)$

e questa non è limitata.

Quindi per $\alpha = 4$ NON ci sono soluzioni limitate.

Parentesi "fisica"

$$\ddot{u} + 16u = 0 \quad \leadsto \quad \ddot{u} = -16u$$



Oscillatore armonico.

Morale: se il termine forzante ha la stessa frequenza dell'oscillatore non forzato, allora le soluzioni diventano NON limitate.

RISONANZA

Esercizio 3 (MORE IS LESS)

$$\ddot{u} + 16u + \alpha \dot{u} = 0 \quad \alpha > 0$$

$$\ddot{u} = -16u - \underbrace{\alpha \dot{u}}_{\uparrow \text{attrito}}$$

Idea fisica: Le soluzioni tendono a 0 per $t \rightarrow \infty$ per colpa dell'attrito.

Domanda: se voglio che TUTTE le sol. tendano a 0 molto velocemente, che α devo usare.

Pd. caract. $x^2 + \alpha x + 16 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 64}}{2}$

Tre scenari a seconda di $\alpha^2 - 64$

$\alpha^2 - 64 < 0$ radici $x = -\frac{\alpha}{2} \pm \beta i$

$$u(t) = a e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos(\beta t) + b e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin(\beta t)$$

Le soluzioni tendono a 0 come $e^{-\frac{\alpha}{2}t}$. Questo vale per $\alpha < 8$

$\alpha^2 - 64 > 0$ Ora le radici sono $-\lambda$ e $-\mu$ reali (sono neg. perché prod. + e somma -)

$$u(t) = a e^{-\lambda t} + b e^{-\mu t}$$

Il decadimento di $u(t)$ dipende dal MINORE fra λ e μ .

Visto che la somma è α , il minore è più piccolo di $\frac{\alpha}{2}$, quindi è MENO di prima.

$\alpha = 8$ $x = -4$ di mult. 2 $\rightsquigarrow u(t) = a e^{-4t} + b t e^{-4t}$
 $\uparrow$ decad. peggiore

Conclusione: il decadimento migliore si ha per $\alpha = 8$, ed è del tipo

$$te^{-4t}$$

Esercizio 4
$$\begin{cases} u' - 5u = \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

Per quali α la sol. è limitata per $t \geq 0$?

Fattore integrante: e^{-5t}

$$u' e^{-5t} - 5u e^{-5t} = e^{-5t} \cdot \arctan t$$

$$(u e^{-5t})' = e^{-5t} \cdot \arctan t$$

$$u(t) = \underbrace{c}_{\alpha} e^{5t} + e^{5t} \int_0^t e^{-5s} \cdot \arctan s \, ds \quad (\text{Formula per la soluzione})$$

$$= \left\{ \alpha + \int_0^t e^{-5s} \cdot \arctan s \, ds \right\} e^{5t}$$

Cosa succede per $t \rightarrow +\infty$? Ovviamente $e^{5t} \rightarrow +\infty$ e l'integrale diventa improprio convergente ad un certo $I \in \mathbb{R}$

- Se $\alpha + I > 0$, allora $u(t) \rightarrow +\infty$
- Se $\alpha + I < 0$, allora $u(t) \rightarrow -\infty$
- Se $\alpha + I = 0$, allora se la gioca e devo fare il limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \int_0^t \dots}{e^{-5t}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ [0/\infty \text{ Hop}]}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-5t} \cdot \arctan t}{-5 e^{-5t}} = -\frac{\pi}{10}$$

ANALISI 1 - LEZIONE 080

Note Title

05/03/2026

Esercizio 1 (Autovalori della derivata seconda)

$$u'' = \lambda u$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

PROBLEMA DI DIRICHLET

Domanda: per quali valori di λ esistono soluzioni NON IDENT. NULLE
(se $u(t)$ è soluzione, allora $c u(t)$ è sol. per ogni $c \in \mathbb{R}$,
quindi per un certo λ , o non ci sono sol, o ce ne
sono ∞)

$$\boxed{\lambda > 0} \quad u(t) = a \cosh(\sqrt{\lambda} t) + b \sinh(\sqrt{\lambda} t)$$

$$u(0) = 0 \rightsquigarrow a = 0 \rightsquigarrow u(t) = b \sinh(\sqrt{\lambda} t)$$

$$u(1) = 0 \rightsquigarrow b = 0$$

$$\Rightarrow \text{L'unica sol. è } u(t) \equiv 0$$

$$\boxed{\lambda = 0} \quad u(t) = a + bt \quad \text{è una retta.}$$

$$\text{Cond. iniz.} \rightsquigarrow u(t) \equiv 0$$

$$\boxed{\lambda < 0} \quad u(t) = a \cos(\sqrt{-\lambda} t) + b \sin(\sqrt{-\lambda} t)$$

$$u(0) = 0 \rightsquigarrow a = 0 \rightsquigarrow u(t) = b \sin(\sqrt{-\lambda} t)$$

$$u(1) = 0 \rightsquigarrow b \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \rightsquigarrow b \text{ qualunque } \circ \\ \searrow b = 0 \end{array}$$

L'unico caso con sol. non ident. nulla è quando $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$

$$\text{cioè } \sqrt{-\lambda} = k\pi, \text{ cioè } \boxed{\lambda = -k^2\pi^2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$\uparrow$ autovalori della der. sec. con quelle condizioni

Oss. Sono autovalori nel senso vero se penso la deriv. seconda come appl. lin. $C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$.

Esercizio 2 $\ddot{u} = u^p$ $u(0) = 2026$ $p > 0$

Oss. La soluzione per $t \geq 0$ è crescente e sempre ≥ 2026

Domanda: nel futuro, ho esistenza globale oppure BU?

$\boxed{p=1}$ $\ddot{u} = u$ $\leadsto u(t) = 2026 e^t$ $\leadsto$ esistenza globale

$\boxed{p=2}$ $\ddot{u} = u^2$ $\leadsto \frac{du}{u^2} = dt$ $\leadsto -\frac{1}{u} = t + c$ $\leadsto u = \frac{1}{c-t}$

$\leadsto 2026 = \frac{1}{c}$ $\leadsto u(t) = \frac{2026}{1-2026t}$ [Verifica!]

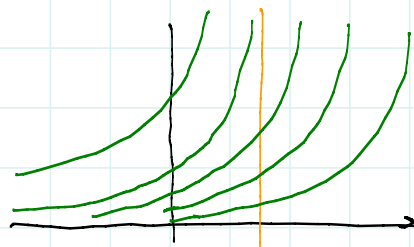
La soluzione ha BU per $t = \frac{1}{2026}$

Oss. Se il dato iniz. era $u(0) = \alpha > 0$, la sol. era

$$u(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha t} \quad \text{con BU in } t = +\frac{1}{\alpha}$$

Il tempo di vita $\rightarrow 0$ per $\alpha \rightarrow +\infty$ e $\rightarrow +\infty$ per $\alpha \rightarrow 0$

Eq. autonoma: le soluzioni si ottengono l'una dall'altra per traslazione



$\boxed{p=\frac{1}{2}}$ $\ddot{u} = \sqrt{u}$ $\frac{du}{\sqrt{u}} = dt$ $\leadsto 2\sqrt{u} = t + c$

$u = \left(\frac{t}{2} + c\right)^2$ $\leadsto u(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{2026}\right)^2$ $\leadsto$ esistenza globale nel futuro

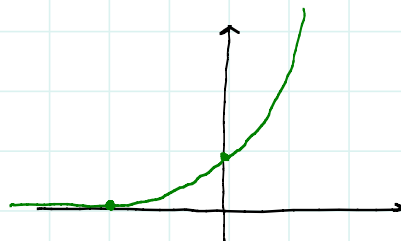
Achtung! Una parabola può essere sol. di un'eq. autonoma?
NO! Intersecherebbe le sue traslate!

Occchio: la formula vale solo per $\frac{b}{2} + \sqrt{2026} \geq 0$

Quindi la soluzione nei negativi diventa definitivamente $\equiv 0$.

Tutte le sue traslate sono soluz.

(PENNELLO DI PEANO)



Risposta domanda iniz.: $\rightarrow$ per $p > 1$ ho BU

$\rightarrow$ per $p \leq 1$ ho esistenza globale nel futuro

$\rightarrow$ per $p < 1$ la soluz. è $\equiv 0$ per t abbastanza negativi.

Caso $p > 1$ $\ddot{u} = u^p \leadsto \frac{du}{u^p} = dt \leadsto \frac{1}{1-p} \frac{1}{u^{p-1}} = t + c$

$$\leadsto \frac{1}{u^{p-1}} = (1-p)t + c \leadsto u^{p-1} = \frac{1}{c - (p-1)t}$$

$$\leadsto u(t) = \left[\frac{1}{c - (p-1)t} \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

Imponendo $u(0) = 2026$ trovo $c > 0$.

A questo p.to la sol. ha BU per $t = \frac{c}{p-1} > 0$ perché $p > 1$.

Domandone: $\ddot{u} = g(u) \quad u(0) = 2026$

e supponiamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ (g cresce più di x)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^p} = 0 \quad \forall p > 1$ (g cresce meno di x^p con $p > 1$)

Classico esempio $x \log x$ oppure $x \log^{\infty} x$

La vera condizione è

$$\int_{2026}^{+\infty} \frac{1}{g(x)} dx = +\infty \quad \leadsto \text{esistenza globale}$$

$$\dot{u} = g(u) \leadsto \frac{1}{g(u)} du = dt$$

$$\leadsto \Gamma(u) = t + c \quad \text{dove } \Gamma' = \frac{1}{g}$$

Come è fatta $\Gamma(x)$? $\Gamma(x) = \int_{2026}^x \frac{1}{g(y)} dy$



- Se l'int. improprio converge, allora Γ ha asintoto all'infinito, quindi è limitata dall'alto, quindi non posso risolvere $\Gamma(u) = t + c$ quando t è troppo grande $\leadsto$ BU

- Se l'int. improprio diverge, allora Γ ha come immagine tutto $[0, +\infty)$, quindi $\Gamma(u) = t + c$ permette di trovare u anche per t grandi $\leadsto$ esistenza globale

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 081

Note Title

11/03/2026

SUCESSIONI PER RICORRENZA

$$x_{n+1} = 3x_n - 1$$

Dato un termine posso
calcolare il successivo

$$x_0 = 2$$

Dato iniziale

Posso iterare: $x_0 = 2$, $x_1 = 3x_0 - 1 = 5$, $x_2 = 3x_1 - 1 = 14$, ...

Se voglio x_{2026} , mi devo fare tutti quelli prima.

$$x_{n+1} = 3x_n - n$$

$$x_0 = 2$$

Regola di passaggio
cambia ogni volta

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 3x_0 - 0 = 6$$

↑
 $n=0$

$$x_2 = 3x_1 - 1 = 17, \dots$$

↑
 $n=1$

Più in generale

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

↑
AUTONOMO

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

↑
NON AUTONOMO

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n^2$$

$$x_0 = 2 \quad x_1 = 7$$

Due cond. iniziali

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$$

$$x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n, n)$$

↓
succ. per. ricorrente di ordine 2; dipendenza
dai due termini precedenti

Analogo per successioni di ordine k .

Domande: → Trovare se possibile una FORMULA CHIUSA per calcolare un termine senza passare dai precedenti
 → Determinare il limite ed eventuali ordini di infinito / infinitesimo senza avere la formula.

Il primo non riesce quasi mai, sul secondo si può lavorare.

Esempio 0 $x_{n+1} = a x_n$

In questo caso $x_n = a^n x_0$ ~ facile induzione ☺

Esempio 1 $x_{n+1} = a x_n + b$

Esplorazione

$$x_1 = a x_0 + b$$

$$x_2 = a x_1 + b = a^2 x_0 + a b + b$$

$$x_3 = a x_2 + b = a^3 x_0 + a^2 b + a b + b$$

$$x_4 = \dots = a^4 x_0 + b(a^3 + a^2 + a + 1)$$

$$= a^4 x_0 + b \frac{a^4 - 1}{a - 1}$$

Congettura: $x_n = a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$ se $a \neq 1$

$$x_{n+1} = x_0 + n b \quad \text{se } a = 1 \quad [\text{N.B. } \lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^n - 1}{a - 1} = n \text{ ☺}]$$

DIM 1 Induzione standard

DIM 2 Bugo $y_n = x_n - l$, dove l è da decidere. Cosa risolve?

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - l = a x_n + b - l = a (y_n + l) + b - l \\ &\quad \uparrow \text{ric.} \quad \quad \quad \uparrow \text{ricavo } x_n \\ &= a y_n + (a l + b - l) \end{aligned}$$

Scelgo l t.c. $al+b-l=0$, cioè $(a-1)l=-b$
 cioè $l = -\frac{b}{a-1}$

In questo modo viene $y_{m+1} = ay_m$, cioè

$$y_m = a^m y_0 = a^m (x_0 - l)$$

e quindi
$$\begin{aligned} x_m = y_m + l &= a^m (x_0 - l) + l \\ &= a^m x_0 - l (a^m - 1) \\ &= a^m x_0 + b \frac{a^m - 1}{a-1} \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$

DIM 3 $x_{m+1} = ax_m + b$

Pseudo $y_{m+1} = ay_m$ da cui $y_m = a^m y_0$

Pseudo $z_{m+1} = az_m + b$

Se pongo $w_m = y_m + z_m$, cosa risolve w_m ?

$$\begin{aligned} w_{m+1} = y_{m+1} + z_{m+1} &= ay_m + az_m + b = a(y_m + z_m) + b \\ &= aw_m + b \end{aligned}$$

Esiste una z_m "comoda"? Sì! Esiste una z_m costante $z_n \equiv l$
 $l = al + b \quad l = -\frac{b}{a-1}$

Allora $x_m = c \cdot a^m - \frac{b}{a-1}$ risolve la ricorrenza per ogni valore di c

Ora basta trovare c in modo da rispettare la cond. iniziale!
 $\rightarrow$ finire il conto.

Oss. La DIM 3 mostra che tutte le solus. di $x_{m+1} = ax_m + b$ sono del tipo

$$x_m = c \cdot a^m - \frac{b}{a-1}$$

$\uparrow$ parametro libero

Esempio 2 $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$

CLAIM Tutte le soluzioni sono del tipo

$$x_n = a 2^n + b 3^n$$

Enistica: vedo se $x_n = \lambda^n$ può essere soluzione. Sostituisco:

$$\begin{aligned} \lambda^{n+2} &= 5\lambda^{n+1} - 6\lambda^n \quad \leadsto \quad \lambda^2 = 5\lambda - 6 \quad \leadsto \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ &\quad \leadsto (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $x_n = 2^n$ e $x_n = 3^n$ sono soluzioni!

Dim Ho verificato che 2^n e 3^n sono sol.

Essendo tutto lineare, lo sono i loro multipli
e pure le loro comb. lineari.

Quindi tutte le succ. $x_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n$ sono solus.
Ce ne sono altre?

No! Scegliendo bene a e b io posso sistemare le cond. iniz.
 x_0 e x_1 , e a quel p.to è per forza unica.

$$\begin{aligned} a + b &= x_0 \\ 2a + 3b &= x_1 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lo stesso metodo funziona per tutte le ricorrenze del tipo

$$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n$$

Tutto sta a trovare le radici del pol. caratteristico

$$x^2 - \alpha x - \beta = 0$$

- se sono λ e μ reali $\leadsto x_n = a\lambda^n + b\mu^n$
- se $\lambda \in \mathbb{R}$ di mult. 2 $\leadsto x_n = a\lambda^n + b n \lambda^n$
- se sono $\rho e^{i\theta}$, $\rho e^{-i\theta}$ $\leadsto x_n = a \rho^n e^{i\theta n} + b \rho^n e^{-i\theta n}$
 $= \hat{a} \rho^n \cos(\theta n) + \hat{b} \rho^n \sin(\theta n)$

Verifica del caso con molteplicità 2.

Sostituisco $x_m = m \lambda^m$

$$x_{m+2} = \alpha x_{m+1} + \beta x_m$$

$$(m+2) \lambda^{m+2} \stackrel{?}{=} \alpha (m+1) \lambda^{m+1} + \beta m \lambda^m$$

$$(m+2) \lambda^2 \stackrel{?}{=} \alpha (m+1) \lambda + \beta m$$

$$m(\lambda^2 - \alpha \lambda - \beta) + \underbrace{2\lambda^2 - \alpha \lambda}_{\lambda(2\lambda - \alpha)} \stackrel{?}{=} 0$$

$= 0$ perché
 λ è radice del
pol. caratter.

"
 $\lambda(2\lambda - \alpha)$

$\uparrow$ λ annulla la deriv. del.
pol. caratteristico
perché ha molteplicità 2

La teoria si estende a ricorrenze lineari omogenee di ogni ordine

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 082

Note Title

11/03/2026

L'ESEMPIO

FIBONACCI

$$x_{m+2} = x_{m+1} + x_m$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \leadsto \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sol. generale $x_m = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m$

$$0 = x_0 = a + b \quad \leadsto \quad b = -a$$

$$1 = x_1 = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - a \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = a\sqrt{5} \quad \leadsto \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Conclusione

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right\}$$

Oss. La formula è piena di $\sqrt{5}$, ma poi i numeri sono tutti interi, quindi le $\sqrt{5}$ se ne vanno !!

Un discorso analogo vale se le radici del pol. sono numeri complessi, ma i dati iniziali sono reali / interi.

Qual è il limite del rapporto tra due Fibonacci consecutivi?

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_{m+1}}{x_m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(chi comincia si raccoglie:
l'altra radice ha val. assol. < 1)

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34

x_m migliaia sono $\sim x_{m+1}$ km perché $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim$ conversione migliaia / km

Le soluzioni di una ricorrenza lin. omog. sono ker di qualcosa?

Sì! Pensiamo a $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$

Sia Succ lo spazio vett. delle succ. di numeri reali.

Consideriamo

$$L: \text{Succ} \rightarrow \text{Succ}$$

definita da

$$L(\{x_n\}) = \{x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n\}$$

Il ker sono le succ. che verificano la ricorrenza

e sono uno sp. vett. di dim 2 (in generale di dim = ordine)

(Basta considerare quelle con dati iniziali 0, 1 e 1, 0)

DIM SOLITA FORMULA CON METODO "ARITMETICO" $x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n$

Invece di considerare x_n come incognita, considero

$$p_n(t) = \beta x_n + x_{n+1} t \quad (\text{mod } t^2 - \alpha t - \beta)$$

$$\begin{aligned} t \cdot p_n(t) &= \beta x_n t + x_{n+1} t^2 && \text{uso che } t^2 \equiv \alpha t + \beta \\ &= \beta x_n t + x_{n+1} (\alpha t + \beta) \\ &= \beta x_{n+1} + (\beta x_n + \alpha x_{n+1}) t \\ &= \beta x_{n+1} + x_{n+2} t \\ &= p_{n+1}(t) \end{aligned}$$

Quindi $p_n(t) = t^n p_0(t) = t^n (\beta x_0 + x_1 t) \text{ mod } \dots$

Noto $p_n(t)$, i suoi coeff. mi danno x_n e x_{n+1} !!!

Come calcolo il quoziente? Devo togliere il modulo.

So che $p_m(t) = t^m (\beta x_0 + x_1 t) + Q_m(t) (t^2 - \alpha t - \beta)$
↑
misterioso

Se sostituisco a t le due radici λ e μ

$$\begin{cases} \beta x_m + x_{m+1} \lambda = \lambda^m (\beta x_0 + x_1 \lambda) \\ \beta x_m + x_{m+1} \mu = \mu^m (\beta x_0 + x_1 \mu) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Le parti con il } Q_m \\ \text{se ne vanno!} \end{array}$$

Questo è un sistema lin. in x_m e x_{m+1} .

DIM CON METODI DI ALG. LINEARE

Pongo $U_m = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_m \end{pmatrix}$. Allora

$$U_{m+1} = \begin{pmatrix} x_{m+2} \\ x_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{m+1} + \beta x_m \\ x_{m+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_m \end{pmatrix}$$

Quindi

$$U_{m+1} = M U_m$$

da cui

$$U_m = M^m U_0$$

Quindi bisogna fare la potenza m -esima della matrice M , che si fa diagonalizzando... chi sono gli autovalori?

$$\lambda^2 - \alpha \lambda - \beta = 0$$

Nel caso della radice di mult. 2, la matrice non si diagonalizza ma si jordanizza e diventa

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad M^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ 0 & \lambda^m \end{pmatrix}$$

Esercizio 1 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

Supponiamo $x_0 = 2026$

Domanda: esistono soluz. limitate?

Detto altrimenti: posso scegliere x_1 in modo che resti limitata?

Sol. generale: $x_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$

L'unica possibilità è che $a=0$. Quindi basta prendere $b=2026$ ed è fatta :).

Quindi $x_1 = 1013(1-\sqrt{5})$

Esercizio 2 $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n + n + 2^n$

Trovare tutte le soluzioni

Parte omog. : $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$
 $\rightsquigarrow (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$$x_n = a 3^n + b (-2)^n$$

Ora cerco sol. speciali con n e 2^n . Lo posso fare separatamente

$\bar{x}_n = an + b$. Sostituisco

$$\underbrace{a(n+2)+b}_{x_{n+2}} = \underbrace{a(n+1)+b}_{x_{n+1}} + \underbrace{6(an+b)}_{+6x_n} + n$$

$$\begin{cases} a = a + 6a + 1 & \text{coeff. } n & a = -\frac{1}{6} \\ 2a + b = a + b + 6b & \text{termine noto} & b = \dots \end{cases}$$

$$\bar{x}_n = c \cdot 2^n$$

$$c \cdot 2^{n+2} = c \cdot 2^{n+1} + 6 \cdot c \cdot 2^n + 2^n$$

$$\rightsquigarrow 4c = 2c + 6c + 1 \rightsquigarrow c = -\frac{1}{4}$$

Sommando viene.

Oss. Se al RHS avevo 3^n , allora $\bar{x}_n = c \cdot 3^n$ non poteva funzionare.

In questo caso dovevo usare

$$\bar{x}_n = c \cdot n 3^n$$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 083

Note Title

12/03/2026

Sistemi di succ. per ricorrenza

Esempio 1 $\begin{cases} a_{m+1} = 3a_m + b_m \\ b_{m+1} = 3a_m + 5b_m \end{cases} \quad a_0 \text{ e } b_0 \text{ dati}$

SLOGAN: due ricorrenze di ordine 1 $\leadsto$ singola ricorrenza di ordine 2
(gli ordini si sommano)

$$a_{m+2} = 3a_{m+1} + b_{m+1} = 3a_{m+1} + 3a_m + 5b_m = 3a_{m+1} + 3a_m + 5a_{m+1} - 15a_m$$

$\uparrow$ shift indici sulla 1^a $\uparrow$ uso 2^a $\uparrow$ $b_m = a_{m+1} - 3a_m$ dalla 1^a

$$\leadsto a_{m+2} = 8a_{m+1} - 12a_m$$

Questa si risolve: $x^2 - 8x + 12 = 0$, $(x-2)(x-6) = 0$

Soluz. generale

$$a_m = C_1 \cdot 2^m + C_2 \cdot 6^m$$

Sempre dalla 1^a: $b_m = a_{m+1} - 3a_m$

$$= C_1 \cdot 2^{m+1} + C_2 \cdot 6^{m+1} - 3C_1 \cdot 2^m - 3C_2 \cdot 6^m$$

$$\leadsto b_m = -C_1 \cdot 2^m + 3C_2 \cdot 6^m$$

Achtung! I C_1 e C_2 nella formula per b_m sono gli stessi di quella per a_m .

Il procedimento funziona bene se le ricorrenze sono lineari (il p.to chiave è ricavare b_m). Eventuali termini non omog. non danno fastidio.

Interpretazione alternativa: posso
e riscrivere la ricorrenza come

$$U_{m+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_M U_m \quad U_{m+1} = M U_m$$

$$\leadsto U_m = M^m U_0$$

Sistemi di eq. diff.

$$\begin{cases} u' = 3u + v \\ v' = 3u + 5v \end{cases} \quad u(0) \text{ e } v(0) \text{ cond. iniziali date}$$

Slogan $\leadsto$ singola equazione di ordine 2.

$$u'' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1ª derivata}}}{3u'} + \underset{\substack{\uparrow \\ v' \text{ dalla 2ª}}}{v'} = 3u' + 3u + 5v = 3u' + 3u + \underset{\substack{\uparrow \\ v \text{ dalla 1ª}}}{5u'} - 15u$$

$$v = u' - 3u$$

$$\leadsto u'' = 8u' - 12u \quad \leadsto x=2 \text{ e } x=6$$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{6t}$$

Dalla 1ª ricavo $v(t) = u'(t) - 3u(t)$

$$\begin{aligned} &= 2a e^{2t} + 6b e^{6t} - 3a e^{2t} - 3b e^{6t} \\ &= -a e^{2t} + 3b e^{6t} \end{aligned}$$

Posso scrivere la soluzione come

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^{2t} + b e^{6t} \\ -a e^{2t} + 3b e^{6t} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Fatto generale: 2 e 6 sono gli autovalori della matrice
 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono i corrispondenti autovettori

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix} \quad ;$$

Ancora più in generale: per un sistema di eq. diff. del tipo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettori} \\ \text{lungo } n}}{U'} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ n \times n}}{M} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore} \\ \text{lungo } n}}{U}$$

Se la matrice M è diagonalizzabile, allora la soluzione generale del sistema è

$$U(t) = \sum_{k=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametri} \\ \text{liberi}}}{c_k} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovettori corrispondenti}}}{v_k} e^{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{autovalori della matrice}}}{\lambda_k t}}$$

Dim Banale sostituzione dei singoli pezzi.

SLOGAN OPPOSTO Ogni equazione diff. qualunque di ordine k è equivalente ad un sistema di k equazioni di ordine 1.

Esempio $u''' + 5u'' + 6\sin(tu') = u^2 + 3$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \quad [\text{Moralmente } u'' = v' = w] \\ w' + 5w + 6\sin(tu') = u^2 + 3 \end{cases}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 u''' u'' u'

Conseguenza teorica: se so fare i teoremi di esistenza / unicità per SISTEMI di ordine uno, li ho gratis per SISTEMI / EQUAZIONI di ordine qualunque.

DELIRIO Equazione $u' = au \rightsquigarrow u(t) = c e^{at}$
 $\uparrow$ numero $\uparrow u(0)$

$u' = a(t)u \rightsquigarrow u(t) = c e^{A(t)}$ dove $A'(t) = a(t)$

Se prendo un sistema $U' = MU$

La soluzione sarà $U(t) = e^{Mt} \cdot U(0)$
 $\uparrow$ matrice $m \times n$
 $\uparrow$ vettore $\uparrow$ vettore
 $\uparrow$ esponenziale di una matrice

[Aggiunto dopo video: questo è vero]

$U' = M(t)U \rightsquigarrow U(t) = e^{\hat{M}(t)} U(0)$

dove $\hat{M}(t) = \int_0^t M(s) ds$
integrale fatto coeff. per coeff.

[Aggiunto dopo video: questo è vero solo sotto ipotesi particolari (senza che le varie $M(t)$ commutino)]

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

[Aggiunto dopo video: **Achtung!**]

$e^M = Id + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3}M^3 + \dots$

La proprietà $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ vale solo se A e B commutano]

Idea: con Taylor posso fare funzioni strane di matrici

Come si calcola? Diagonalizzo $\rightsquigarrow$ faccio e
fissi sulla diagonale
 $\rightsquigarrow$ torno indietro

[Semplicemente altro modo di dire la formula con autov. / autovetori]

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 084

Note Title

12/03/2026

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$

Ci sarebbe una formula esplicita, ma faccio finta di non saperlo :)

Obiettivo: trovare il limite.

PIANO

- (i) $0 \leq x_n \leq \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
- (iv) $l = 0$

} Piano standard con la monotonia

Dim (iii) Dal (ii) sappiamo che è deb. dec.
 Dal (i) sappiamo che è limit. superiormente
 Teo. succ. monotone $\Rightarrow$ esiste limite reale

Dim (iv) Una volta stabilito (iii), posso passare al limite nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^3 \end{array} \Rightarrow l = \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \rightarrow 1 \\ \searrow -1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \rightarrow 1 \\ \searrow -1 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{NON sono compatibili} \\ \text{con pto (i)} \end{array}$$

Dim (i) Induzione

$n=0$ Banale

$n \Rightarrow n+1$ Per ipotesi $0 \leq x_n \leq \frac{2}{3}$

Elevo tutto al cubo (posso perché è strett. crescente)

$$0 \leq x_n^3 \leq \frac{8}{27} \leq \frac{2}{3}$$

$\begin{array}{ccc} \text{"} & & \uparrow \\ x_{n+1} & & \text{verifica} \end{array}$

$\leadsto 0 \leq x_{n+1} \leq \frac{2}{3}$ che è la tesi

Dim (ii) Devo dim. che $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1° modo : ricorrenza + disequazione

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \text{vuol dire} \quad x_n^3 \leq x_n$$

$$\Leftrightarrow x_n \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$\uparrow$
precorso

Ma noi sappiamo che $x_n \in [0, \frac{2}{3}]$, quindi ok.

2° modo : induzione + applico $\neq$ Dim. $x_{n+1} \leq x_n$ per indus.

$n=0$ $x_1 \stackrel{?}{\leq} x_0 \quad x_1 = \frac{8}{27} \leq \frac{2}{3} = x_0 \quad \checkmark$

$n \Rightarrow n+1$ Per ipotesi: $x_{n+1} \leq x_n$

Faccio il cubo (posso perché strett. cresc.)

$$\underbrace{x_{n+1}^3}_{=0} \leq \underbrace{x_n^3}_{=0} \quad \text{cioè} \quad x_{n+2} \leq x_{n+1} \quad \checkmark$$

Oss. Volendo posso mettere (i) e (ii) insieme facendo

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[Si dimostra con induzione + applico $\neq$]

Esempio 2 $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^3 \\ x_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$

- PIANO**
- (i) $x_n \geq \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 - (iv) $l = +\infty$

Dim (iii) (ii) + teo. succ. monotone (non posso escludere $l = +\infty$ perché non ho un bound superiore)

Dim (iv) SE PER ASSURDO fosse $l \in \mathbb{R}$, allora passo al lim nella ricorrenza

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & x_n^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^3 \end{array} \Rightarrow l = \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

Nessuno è compatibile con p.to (i), quindi resta solo $l = +\infty$.

Dim (i) Induzione standard

Dim (i) Funzionano entrambe gli approcci

→ ricorrenza + diseq.

→ induzione + applico $\neq$

Oss. Potrei riassumere (i) e (ii) dicendo

$$\frac{3}{2} \leq x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e dimostrarlo per induzione.

Esempio 3 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10} \quad x_0 = 2026$

PIANO (i) $x_n \geq 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad [(i) + (ii) + \text{teo. succ. monotone}]$

(iv) $l = 5$

Dim (iv) Grazie a 3 passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 10}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$l = \sqrt{3l + 10}$$

$$l^2 = 3l + 10 \quad l^2 - 3l - 10 = 0$$

$$(l-5)(l+2) = 0$$

$$l = 5 \quad \text{oppure} \quad \boxed{l = -2}$$

↑ NON ACCETTABILE
come sol. dell'equazione

Quindi per forza $l = 5$

Dim (i) Induzione $x_0 \geq 5 \quad 2026 \geq 5 \quad \checkmark$

$n = m+1$ Ipotesi: $x_m \geq 5 \Rightarrow 3x_m + 10 \geq 15 + 10 = 25$
quindi $x_{m+1} = \sqrt{3x_m + 10} \geq \sqrt{25} = 5 \quad \checkmark$

Dim (ii) Funzionano entrambi i metodi

Induzione + applico f : $x_1 \leq x_0 \quad \sqrt{3 \cdot 2026 + 10} \leq 2026$
abbondante ...

$n \Rightarrow m+1$ Ipotesi: $x_{m+1} \leq x_m$
 $\Rightarrow 3x_{m+1} + 10 \leq 3x_m + 10$
 $\Rightarrow$ faccio la radice (posso perché...)
e ottengo $x_{m+2} \leq x_{m+1}$
— o — o —

PIANO CON LA MONOTONIA

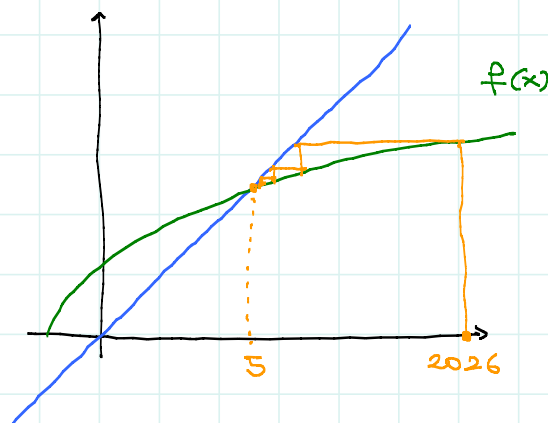
- (i) Dove sta x_n
- (ii) Monotonia
- (iii) $x_n \rightarrow l$ da qualche parte
- (iv) trovo l

Come ottengo il piano?

$$x_{m+1} = \sqrt{3x_m + 10}$$

" $f(x_m)$

Disegno il grafico di f e
la bisettrice

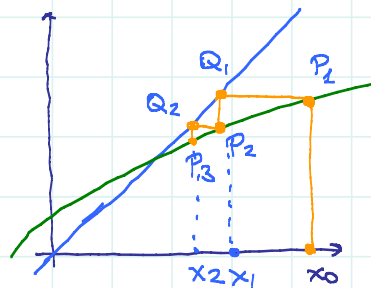


I p.ti di incontro si trovano risolvendo $l = f(l)$, cioè
l'eq. del p.to (iv).

SLOGAN Parto da $x_0 = 2026$ e faccio
→ VERTICALE ALLA FUNZIONE
→ ORIZZONTALE ALLA BISETRICE

Perché funziona?

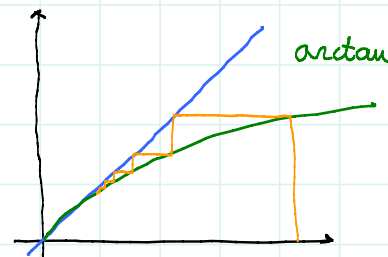
$$\begin{aligned} P_1 &= (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1) \\ Q_1 &= (x_1, x_1) \\ P_2 &= (x_1, x_2) \\ Q_2 &= (x_2, x_2) \end{aligned}$$



Quando applico lo slogan, le coord. x dei vari p.ti sono $x_0, x_1, x_2, \dots$

Esempio $x_{m+1} = \arctan x_m$
 $x_0 = 2026$

- (i) $0 \leq x_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$
 - (ii) $x_{m+1} \leq x_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$
 - (iii) $x_m \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 - (iv) $l = 0$
-] inclus.
] tes. succ. monot.
] $l = f(l)$ con studio funz.



ANALISI 1 - LEZIONE 085

Note Title

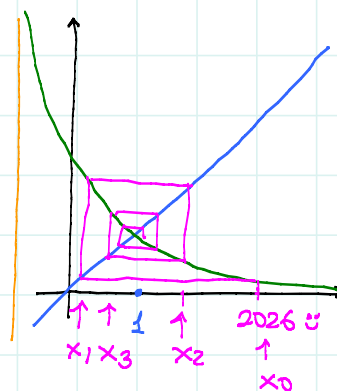
16/03/2026

Esempio 1 $x_{m+1} = \frac{8}{5+3x_m}$ $x_0 = 2026$

Idea: $x_m \rightarrow 1$ spiraleggiando

Due strategie

- piano con la distanza
- piano con le due s. succ.



Piano con la distanza Pongo $d_m := |x_m - l|$ = distanza dal presunto limite l

(i) dove sta x_m

(ii) $d_{m+1} \leq c d_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ dove $c < 1$ è una costante

(iii) $d_m \leq c^m d_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iv) $d_m \rightarrow 0$ cioè $x_m \rightarrow l$

(iv) segue da (iii) perché $0 \leq d_m \leq c^m d_0$ essenziale che c è fisso e < 1

(iii) induzione a partire da (ii)

Tornando all' esempio

(i) $x_m \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (induzione)

(ii) $d_{m+1} \leq \frac{3}{5} d_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iii) $d_m \leq \left(\frac{3}{5}\right)^m d_0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iv) $d_m \rightarrow 0$, cioè $x_m \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad d_{m+1} &= |x_{m+1} - 1| = \left| \frac{8}{5+3x_m} - 1 \right| = \left| \frac{8-5-3x_m}{5+3x_m} \right| \\
 &= \frac{3|1-x_m|}{5+3x_m} = \frac{3d_m}{5+3x_m} \leq \frac{3}{5} d_m
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
ma $x_m \geq 0$

Oss 1 La succ. x_n non è monotona, ma d_n lo è (anzi decade di $\frac{3}{5}$ ogni volta)

Oss 2 Poichiamo $f(x) = \frac{8}{5+3x}$. Allora

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \underset{\substack{\uparrow \\ 1=f(1)}}{|f(x_n) - f(1)|} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante di Lip di } f(x) \\ \text{nella zona in cui stanno} \\ x_n \text{ e } 1}}{L} |x_n - 1| = L d_n$$

Nell'esempio $L = \sup \{ |f'(x)| : x \geq 0 \}$

$$= \sup \left\{ \frac{8 \cdot 3}{(5+3x)^2} : x \geq 0 \right\} = \frac{24}{25} < 1 \quad \text{☺}$$

$\uparrow$ altro possibile valore di c

Prova con le due sottosuccessioni

Idea: x_n non è monotona, ma x_{2n} e x_{2n+1} lo sono!

- (i) $1 \leq x_{2n+2} \leq x_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ sui pari $\searrow$
- (ii) $x_{2n+1} \leq x_{2n+3} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ su dispari $\nearrow$
- (iii) $x_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad x_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R} \quad (\text{teo. succ. monotone})$
- (iv) $l = m = 1$

Dim (iv)

$$\begin{array}{ccc} x_{2n+1} = \frac{8}{5+3x_{2n}} & & x_{2n+2} = \frac{8}{5+3x_{2n+1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m = \frac{8}{5+3l} & & l = \frac{8}{5+3m} \end{array}$$

Devo risolvere un sistema in m ed l

$$\begin{array}{lcl} 3m + 3ml = 8 & \text{Sottraggo } m=l & \leadsto 3l^2 + 5l - 8 = 0 \\ 5l + 3ml = 8 & \leadsto l=1 \text{ oppure } l = -\frac{8}{3} & \end{array}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{incompatibile}}$

Dim (i) e (ii) molto manuale

La illustro nel caso più semplice $x_0 = 2$.

Calcolo i primi termini: $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{8}{11}$, $x_2 = \frac{8}{5 + \frac{24}{11}} = \frac{88}{49}$

Osservo che $1 \leq x_2 \leq x_0$

Applico $f(x)$ e invertito i versi: $f(1) \geq f(x_2) \geq f(x_0)$

$$1 \geq x_3 \geq x_1$$

Applico $f(x)$ e invertito i versi: $f(1) \leq f(x_3) \leq f(x_1)$

$$1 \leq x_4 \leq x_2$$

Continuando ad applicare f ottengo tutte le relazioni che mi servono.

Superformale Dimostro per induzione che

$$\frac{8}{11} \leq x_{2m+1} \leq x_{2m+3} \leq 1 \leq x_{2m+2} \leq x_{2m} \leq 2026$$

→ calcolo a mano i primi 4 termini x_0, x_1, x_2, x_3
e vedo che funzionano

→ al passaggio induttivo prendo l'ipotesi e applico due volte $f(x)$. La composizione è crescente, quindi salvo i versi e ottengo la tesi induttiva.

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{8}{3+5x_n}$ $x_0 = 2026$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{8}{3+5x_n} - 1 \right| = \frac{|8-3-5x_n|}{3+5x_n} = \frac{5|1-x_n|}{3+5x_n} \leq \frac{5}{3} d_n \quad \text{☹️}$$

Vie d'uscita: → se per caso $1 \leq x_2 \leq x_0$ (vera abbondante)
da qui posso procedere con le due s.succ.

→ costruire un p.to (i) più forte da cui dedurre che $x_n \geq \frac{1}{2}$ perché a quel p.to

$$d_{n+1} = \frac{5d_n}{3+5x_n} \leq \frac{5}{5,5} d_n \quad \text{c} \quad \uparrow \quad x_n \geq \frac{1}{2}$$

Ma... $x_n \geq \frac{1}{2}$ non si può dim. per inclusione, oltre al fatto che per x_1 è falso

Bisogna sperare di trovare una disuguaglianza del tipo

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq \alpha \quad \uparrow \quad \text{da trovare}$$

che sia vera definitivamente. A quel p.to uso la distanza

Quando provo a dim. per inclusione mi ritrovo

$$\frac{1}{2} \leq f(\alpha) \leq x_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{Se ne } \frac{1}{2} \leq f(\alpha) \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \alpha$$

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 086

Note Title

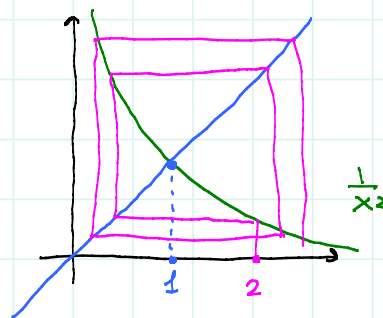
16/03/2026

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}$ $x_0 = 2$

Idea: lo spiraleggiamento ora è uscente, quindi

$$x_{2m} \rightarrow +\infty \quad x_{2m+1} \rightarrow 0$$

quindi x_n non ha limite



Facciamo finta di non vedere che c'è una formula esplicita...

(i) $x_{2m+2} \geq x_{2m} \geq 2 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(ii) $0 \leq x_{2m+3} \leq x_{2m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$x_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

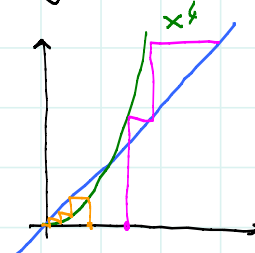
(iv) $l = +\infty$ e $m = 0$

La via più veloce è la **DOPPIA ITERAZIONE**

Pongo $y_m = x_{2m}$, cioè la s.succ. dei pari

$$y_{m+1} = x_{2m+2} = f(x_{2m+1}) = f(f(x_{2m})) = f(f(y_m)) = y_m^4$$

Quindi la succ. dei pari soddisfa $y_{m+1} = y_m^4$ con $y_0 = 2$ e questa tende a $+\infty$ grazie al piano con la monotonia.



Analogamente $z_m := x_{2m+1}$ soddisfa

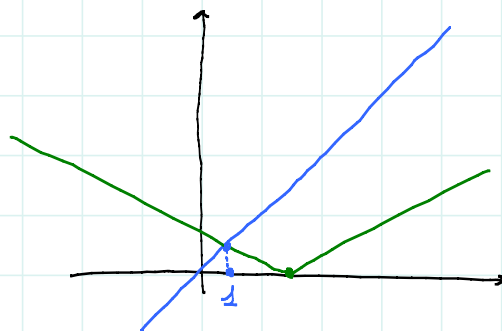
$$z_{m+1} = z_m^4 \quad \text{con} \quad z_0 = x_1 = \frac{1}{4}$$

e questa va a 0 per il piano con la monotonia.

Esempio 2 $x_{n+1} = \frac{|x_n - 3|}{2}$ $x_0 = 2026$

Punto fondamentale:

$f(x) = \frac{1}{2} |x-3|$ è Lipschitziana
con costante $\frac{1}{2}$



$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{2} ||b-3| - |a-3|| \leq \frac{1}{2} |b-a|$$

↑
 $| |A| - |B| | \leq |A - B|$

Piano con la distanza

$$d_n := |x_n - 1|$$

(i) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

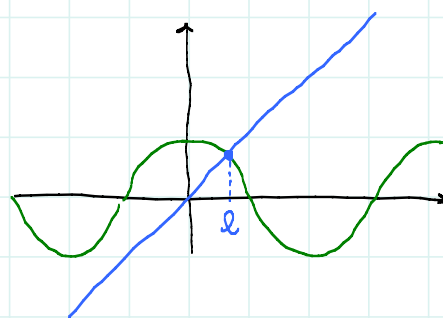
(iii) $d_n \rightarrow 0$ cioè $l=1$

Dim (i): $d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| \leq \frac{1}{2} |x_n - 1| = \frac{1}{2} d_n$
↑
Lip!!

Esempio 2 $x_{n+1} = \cos x_n$ $x_0 = 2026$

[Prendo calcolatrice, scrivo 2026, e poi schiaccio ripetutamente cos]
Dopo un po' si stabilizza. Perché?

L'idea è che $x_n \rightarrow l$, dove
 l è l'unica soluzione di
 $l = \cos l$



Perché la sol. esiste ed è unica?

Studio $x - \cos x$ e dim. che è iniettiva e surgettiva.

Se provo il piano con la distanza

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |\cos x_n - \cos l| \leq |x_n - l| = 1 \cdot d_n$$

↑
NON MI PIACE ☹

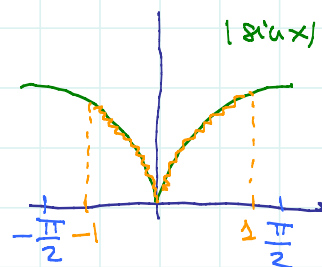
Idea: provare a migliorare la costante di Lip!

(i) $-1 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ ovvia perché $-1 \leq \cos x \leq 1$

(ii) $d_{n+1} \leq \underbrace{(\sin 1)}_{c < 1} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Qual è la costante di Lip di $\cos x$ in $[-1, 1]$?

$$L = \max \left\{ \underbrace{|\sin x|}_{|f'(x)|} : x \in [-1, 1] \right\}$$

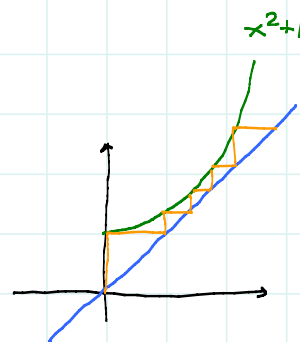


Esempio 3 $x_{n+1} = x_n^2 + 1 \quad x_0 = 0$

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$$

Precorso: $x^2 + 1 > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$



Adesso: $x_n \rightarrow +\infty$

Piano: (i) NON SERVE

(ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $l = +\infty$ (se fosse $l \in \mathbb{R}$, allora $l^2 + 1 = l \dots$)

Quindi $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ quindi ok cond. nec.

Uso criterio del rapporto con $a_n = \frac{1}{x_n}$

[Devo fare prima per inclusione che $x_n > 0$ per ogni $n \geq 1$]

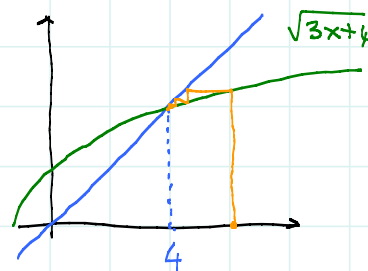
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{x_{n+1}} \cdot x_n = \frac{x_n}{x_n^2 + 1} \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^2 + 1}}} 0$$

$0 < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 4 $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$ $x_0 = 5$ $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^n (x_n - 4)$

Idea: $x_n \rightarrow 4$ decrescendo

Piano: (i) $4 \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 (iv) $l = 4$



Potremo $a_n = \underset{+\infty}{10^n} (\underset{0}{x_n - 4})$

Criterio rapporto [Se $x_n > 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ma basta modificare ci)]

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{10^{n+1} (x_{n+1} - 4)}{10^n (x_n - 4)} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3x_n + 4} - 4}{x_n - 4} \cdot \frac{\sqrt{+4}}{\sqrt{+4}} \\ &= 10 \cdot \frac{3x_n + 4 - 16}{(x_n - 4)(\sqrt{3x_n + 4} + 4)} \\ &= 10 \cdot \frac{3(x_n - 4)}{(x_n - 4)(\sqrt{+4})} \rightarrow \frac{30}{8} > 1 \end{aligned}$$

quindi $a_n \rightarrow +\infty$.

Oss. $f'(4) = \frac{3}{8}$

↗ Derivata nel
p.to intersezione

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 087

Note Title

18/03/2026

SUCC. PER RICORRENZA NON AUTONOME

$$x_{n+1} = f(x_n, n)$$

L'unica regola è che usi ci sono regole!

Esempio 1 $x_{n+1} = n x_n$ $x_1 = 3$
 (se mettessi $x_0 = 3$ sarebbe $x_n = 0 \forall n \geq 1$)

È abbastanza chiaro che $x_n \rightarrow +\infty$.

PIANO 1 (Monotonia) (i) $x_n \geq 3 \forall n \geq 1$ (facile indus.)
 (ii) $x_{n+1} \geq x_n \forall n \geq 1$
 (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (teo. succ. monot.)
 (iv) $l = +\infty$

Diu (iv) $x_{n+1} = n x_n$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad l$

Va sistemato... se fosse $l \in \mathbb{R}$ allora sarebbe $l \geq 3$ e quindi
 $x_{n+1} \rightarrow +\infty$ quindi $x_n \rightarrow +\infty$

Diu (ii) $x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow n x_n \geq x_n \Leftrightarrow (n-1) x_n \geq 0$ ok :
 $\uparrow$
 uso ric.

Alternativa: lo diu. per induzione $x_2 \geq x_1$ a manoP.I. Ipotesi: $x_{n+1} \geq x_n$. Allora

$$x_{n+2} = (n+1) x_{n+1} \geq (n+1) x_n \geq n x_n = x_{n+1}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 ric. ipotesi $n+1 \geq n$ ric.
 ind. e $x_n \geq 0$

PIANO 2 (Stima + confronto)(i) $x_n \geq 3 \quad \forall n \geq 1$ come prima(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) $x_{n+1} = n x_n \geq \boxed{3n}$
 $\downarrow$
 $+\infty$

Per confronto $x_{n+1} \rightarrow +\infty$
 quindi anche $x_n \rightarrow +\infty$

PIANO 3 (Criterio del rapporto)(i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)(ii) $x_n \rightarrow +\infty$ Dim (ii) Uso criterio del rapporto (qui serve (i))

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n x_n}{x_n} = n \rightarrow +\infty > 1, \text{ quindi } x_n \rightarrow +\infty$$

Esempio 2 $x_{n+1} = x_n \cdot \arctan n \quad x_1 = \frac{1}{2026}$

PIANO 3 (i) $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ (induzione)(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) Criterio rapporto: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \arctan n \rightarrow \frac{\pi}{2} > 1$
 quindi $x_n \rightarrow +\infty$

Oss. La succ. non è monotona poiché $x_2 = \frac{1}{2026} \cdot \frac{\pi}{4} < x_1$

però diventa monotona non appena $\arctan n \geq 1$

PIANO 1 Sia $m_0 \geq 1$ tale che $\arctan n \geq 1 \quad \forall n \geq m_0$ (i) $x_n \geq x_{m_0} \quad \forall n \geq m_0$ (ii) $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \geq m_0$ (iii) $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (iv) $l = +\infty$

si possono compattare
 in un solo

PIANO 2 (i) $x_n \geq x_{m_0} > 0 \quad \forall n \geq m_0$

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) $x_{n+1} = x_n \arctan n \geq x_{m_0} \cdot \arctan n$
e di qui non si va da nessuna parte,
quindi **NON FUNZIONA**

Esempio 3 $x_{n+1} = \frac{x_n + 7}{n+5} \quad x_0 = 2026$

Esplorazione: sarà monotona?

$$x_{n+1} \stackrel{?}{\leq} x_n \Leftrightarrow \frac{x_n + 7}{n+5} \stackrel{?}{\leq} x_n \Leftrightarrow x_n + 7 \stackrel{?}{\leq} n x_n + 5 x_n$$

$$\Leftrightarrow x_n (n+4) \stackrel{?}{\geq} 7 \Leftrightarrow x_n \geq \frac{7}{n+4}$$

Quindi servirebbe un p.to (i) che dica $x_n \geq \frac{7}{n+4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
che volendo si può dim. per induzione. [viene facile: provato dopo video]

Se sapessi già che $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora passo al limite nella ricorrenza

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 7}{n+5} \rightarrow \frac{l+7}{+\infty} = 0$$

PIANO (Limitatezza + Carabinieri) (i) $0 \leq x_n \leq 8000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $x_n \rightarrow 0$

Dim (i) $x_n \geq 0$ è banale induzione

$x_n \leq 8000$ P.B. $n=0 \quad \checkmark$

P.I. Ipotesi: $x_n \leq 8000$. Allora

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 7}{n+5} \leq \frac{8007}{5} \leq 8000$$

$\uparrow$
num + grande, denum. + piccolo

Dim (ii) Grazie a (i) sappiamo che

$$\boxed{\frac{7}{n+5}} \leq x_{n+1} \leq \boxed{\frac{8007}{n+5}} \quad \text{e quindi pure } x_n \rightarrow 0$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0$

Domanda: per quali α converge $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^\alpha$?

O ancora meglio: determinare la parte principale di x_n .

Risposta: $x_n \sim \frac{7}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, cioè $nx_n \rightarrow 7$

È equivalente a fare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{n+1}{n+5}} (x_{n+1}7) = 7 \quad \text{☺}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad \quad 0$

Oss. Se il dato iniziale fosse stato $x_0 = \frac{1}{203}$, converiva comunque un p.to (i) abbastanza tipo

$$0 \leq x_n \leq 8000$$

Esempio 4 $x_{n+1} = \frac{x_n}{n+5} + \sqrt{n} \quad x_0 = 1$

$$x_1 = \frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{\frac{1}{5}}{6} + 1 = \frac{1}{30} + 1$$

PIANO (i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \geq 0$ (induzione)

(ii) $x_n \rightarrow +\infty$

Dim (ii) Da (i) segue che $x_{n+1} \geq \sqrt{n}$. Fine per confronto

Esempio 5 $x_{n+1} = \frac{x_n + 7n}{n+5}$ $x_0 = 2026$

PIANO (i) $0 \leq x_n \leq 8000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \rightarrow ?$ (Carabinieri)

... P.I. $x_n \leq 8000 \rightsquigarrow x_{n+1} = \frac{x_n + 7n}{n+5} \leq \frac{8000 + 7n}{n+5} \stackrel{?}{\leq} 8000$

Controllo: $8000 + 7n \leq 8000n + 40.000$ BOIA!

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 088

Note Title

18/03/2026

Esempio 0 $x_{n+1} = \frac{n^{2026}}{2^n} x_n$ $x_1 = 2026$

$x_n \rightarrow 0$ PIANO (i) $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$
(ii) $x_n \rightarrow 0$ (RAPPORTO)

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{n^{2026}}{2^n} x_n + 25$ $x_1 = 2026$

Idea: $x_n \rightarrow 25$, ma il criterio del rapporto non lo posso fare 😞
Mi serve un bound dall'alto, ma uno effettivo non si trova.

Idea: sia $m_0 \geq 1$ tale che $\frac{n^{2026}}{2^n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq m_0$
↑ posso mettere $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{312}$,
ma meglio NON 1

PIANO (i) $25 \leq x_n \leq x_{m_0} \quad \forall n \geq m_0$
(ii) $x_n \rightarrow 25$

Dim (ii) : Carabinierei!

$$25 \leq x_{n+1} \leq \frac{n^{2026}}{2^n} x_{m_0} + 25 \quad \forall n \geq m_0$$

↓
0

Dim (i) $x_n \geq 25$... ovvio...

$x_n \leq x_{m_0}$ per induzione

P.B. $n = m_0$: ✓

P.I. Ipotesi: $x_n \leq x_{m_0}$. Allora

$$x_{n+1} = \frac{n^{2026}}{2^n} x_n + 25 \leq \frac{x_{m_0}}{2} + 25 \leq x_{m_0}$$

↑ uso ipotesi e def. di m_0 ↑ spero

Ma sarà vero? Meglio essere + canti e fare

$$x_{m_0} + 5000 + 50 \leq 2x_{m_0} + 10.000 \quad \text{BOIA!}$$

Idea : $x_n \rightarrow 1$ perché vince $\sqrt[n]{\cdot}$.

Dim (i) Inklusionen ... PI ...

Controllo la speranza; per $n=1$ NO ;
per $n \geq 2$...

Quindi basta anche $x_2 \leq 8000$ a mano e poi parte induzione

Esempio 4 $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + n}$ $x_1 = 2026$

Potei fare il piano con $x_n \leq 8000 \dots$

Nel passo induttivo trovo

$$\dots \sqrt[n]{n+8000} \leq 8000$$

che è vero da un mo misterioso in poi.

Però devo controllare il passo per quell'uo misterioso.

SLOGAN: riconenza e definitivamente non vanno facilmente d'accordo

PIANO (i) $1 \leq x_n \leq 8000 + 8000n \quad \forall n \geq 1$

(ii) carabinieri

Passo induttivo del p.to (i)

$$x_{n+1} = \sqrt[n]{x_n + n} \leq \sqrt[n]{8000 + 8001n} \leq 8000 + 8000(n+1)$$

Per $n \geq 2$

$$\sqrt[n]{\dots} \leq \sqrt{\dots} \leq 8000n + 16000$$

$$\Leftrightarrow 8000 + 8001n \leq (8000n + 16.000)^2$$

Esempio 5 $x_{n+1} = \frac{nx_n + 7}{2n+13}$ $x_0 = 2026$

Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l = \frac{nl+7}{2n+13} = \frac{l}{2} \rightsquigarrow l=0$

↑
PORCATA:
limite metà per volta

PIANO (i) $0 \leq x_n \leq 8000 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Questo non basta per usare i carabinieri al p.to successivo.

$$x_{n+1} = \frac{nx_n}{2n+13} + \frac{7}{2n+13} \leq \frac{nx_n}{2n} + \frac{7}{2n+13} = \frac{x_n}{2} + \frac{7}{2n+13}$$

Tentativo: (i) $0 \leq x_n \leq \frac{8000}{n} \quad \forall n \geq 1$

Induzione ... P.I. $x_{n+1} \leq \frac{x_n}{2} + \frac{7}{2n+13} \leq \frac{4000}{n} + \frac{7}{2n+13} \stackrel{?}{\leq} \frac{8000}{n+1}$

Farendo il conto è abbondantissima

$$\frac{4000}{n} + \frac{7}{2n+13} \leq \frac{4000}{n} + \frac{8}{2n} \leq \frac{8000}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4004}{n} \leq \frac{8000}{n+1}$$

Qual è la parte principale?

Congettura: $x_n \sim \frac{c}{n}$ $\quad \quad \quad x_{n+1} \sim \frac{nx_{n+7}}{2n+13} \sim \frac{c+7}{2n+13} \sim \frac{c+7}{2n}$

$\frac{3}{2} \frac{c}{n}$

$\leadsto c = \frac{c+7}{2} \leadsto c = 7$ congettura $x_n \sim \frac{7}{n}$

— 0 — 0 —

ANALISI 1 - LEZIONE 089

Note Title

19/03/2026

L'ESEMPIO (Valori soglia) # capra & pauca

$$x_{m+1} = x_m^2 + \frac{1}{10m} \quad x_1 = \alpha > 0$$

Esplorazione: se $x_m \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{array}{ccc} x_{m+1} & = & x_m^2 + \frac{1}{10m} \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ l & = & l^2 + 0 \end{array} \quad l = l^2 \quad l = \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow 0 \end{array}$$

Anche $l = +\infty$ sembra un limite possibileOss 1 Se $\alpha = 2026$, allora $x_m \rightarrow +\infty$ Piano: (i) $x_m \geq 2026 \quad \forall m \geq 1$ (ii) $x_{m+1} \geq x_m \quad \forall m \geq 1$ (iii) $x_m \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (iv) $l = +\infty$

} esecuzione standard

Oss 2 Se $\alpha = \frac{1}{2}$, allora $x_m \rightarrow 0$ Piano: (i) $0 \leq x_m \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (ii) $x_{m+1} \leq x_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ (iii) $x_m \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (iv) $l = 0$ Dim (i) + (ii) Dim. per induzione che $0 \leq x_{m+1} \leq x_m \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \geq 1$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \quad \text{quindi } 0 \leq x_2 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \quad \text{P.B. } \therefore$$

P.I. Per ipotesi $0 \leq x_{m+1} \leq x_m \leq \frac{1}{2}$. Faccio i $\square$

$$0 \leq x_{m+1}^2 \leq x_m^2 \leq \frac{1}{4}$$

Ma allora, aggiungendo $\frac{1}{10(m+1)}$ ottengo

$$0 \leq \underbrace{\frac{1}{10(m+1)} + x_{m+1}^2}_{x_{m+2}} \leq \frac{1}{10(m+1)} + x_m^2 \leq \underbrace{\frac{1}{10m} + x_m^2}_{x_{m+1}} \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Alla fine $0 \leq x_{m+2} \leq x_{m+1} \leq \frac{1}{2}$ $\square$

Congettura Esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

- per $\alpha > \alpha_0$ si ha che $x_n \rightarrow +\infty$
- per $\alpha \in [0, \alpha_0)$ si ha che $x_n \rightarrow 0$
- per $\alpha = \alpha_0$ si ha che $x_n \rightarrow 1$

Notazione: chiamiamo $x_n(\alpha)$ il termine x_n partendo con $x_1 = \alpha$
 $x_2(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{10}$ $x_3(\alpha) = [x_2(\alpha)]^2 + \frac{1}{20} = (\alpha^2 + \frac{1}{10})^2 + \frac{1}{20}$
 e così via.

FATTO 1 Per ogni $n \geq 1$, la funzione $\alpha \rightarrow x_n(\alpha)$ è continua (è un polinomio in α) e crescente per $\alpha \geq 0$.

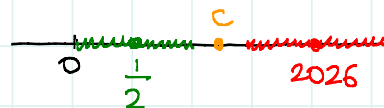
Poniamo $A = \{\alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty\}$

$B = \{\alpha \geq 0 : x_n(\alpha) \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty\}$

Cosa sappiamo già?

$$\frac{1}{2} \in A$$

$$2026 \in B$$



FATTO 2 Se $\alpha \in B$, allora ogni $\beta \geq \alpha$ vale ancora $\beta \in B$

Se $\alpha \in A$, allora tutti quelli sotto α sono in A

Quindi A sta a sx di B , cioè $a < b$ per ogni $a \in A, b \in B$

Quindi c'è un fizio in mezzo almeno, ed è candidato ad essere la soglia.

FATTO 3 La zona B è aperta, cioè per ogni $b \in B$ esiste $\bar{b} \in B$ tale che $\bar{b} < b$.
Questo impedisce che $\inf B \in B$.

Se $x_n(b) \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, allora esiste $n_0 \geq 1$ t.c.
 $x_{n_0}(b) > 1$. Ma x_{n_0} , come funzione di b , è continua.
Quindi esiste $\bar{b} < b$ tale che $x_{n_0}(\bar{b}) > 1$.
Ma allora $x_n(\bar{b}) \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, perché da lì in poi è crescente e > 1 .

FATTO 4 La zona A non contiene il suo sup, cioè
 $\forall a \in A \exists \bar{a} \in A$ t.c. $\bar{a} > a$.

Se $x_n(a) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, allora esiste $n_0 \geq 1$ t.c.

$$x_{n_0+1}(a) < x_{n_0}(a) < 1$$

$\uparrow$ vera frequentemente, altrimenti
 $\uparrow$ vera definitivamente, altrimenti
 sarebbe deb. cresc. e non
 potrebbe $\rightarrow 0$.

Ma allora per continuità la stessa cosa è vera per un certo $\bar{a} > a$. Da quel p.to in poi $x_n(\bar{a})$ risulta ≤ 1 e decrescente

Idea fond. se $x_{n+1} \leq x_n \leq 1$, allora da quel valore di n in poi la succ. è decrescente

$$x_{n+2} = x_{n+1}^2 + \frac{1}{10(n+1)} \leq x_n^2 + \frac{1}{10n} = x_{n+1}$$

Fatto 5 Sia c in mezzo tra A e B . Dico che $x_n(c) \rightarrow 1$

Sappiamo che $x_n(c) \leq 1$ per ogni $n \geq 1$ (se $x_{n_0}(c) > 1$, allora $c \in B$)

Sappiamo che $x_{n+1}(c) \geq x_n(c)$ per ogni $n \geq 1$
 (se $x_{n+1}(c) < x_n(c)$, allora per forza $c \in A$)

Ma allora $x_n(c)$ è sempre ≤ 1 e crescente, quindi
 ha limite $l \in \mathbb{R}$ e per forza $l = 1$.

FATTO 6 Unicità di c

Supponiamo che y_n e z_n siano due succ. che tendono a 1

$$y_{n+1} = y_n^2 + \frac{1}{10n} \quad z_{n+1} = z_n^2 + \frac{1}{10n}$$

Supponiamo che $y_1 > z_1$

Allora intuitivo $y_n > z_n$ per ogni $n \geq 1$ (induzione)

Poniamo $d_n := y_n - z_n$ (sappiamo che $d_n > 0$ e $d_n \rightarrow 0$)

Cosa risolve?

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= y_{n+1} - z_{n+1} = y_n^2 + \frac{1}{10n} - z_n^2 - \frac{1}{10n} \\ &= (y_n + z_n)(y_n - z_n) \\ &= \underbrace{(y_n + z_n)}_{\downarrow 2} d_n \end{aligned}$$

Quindi $d_{n+1} \geq \frac{3}{2} d_n$ definitivamente, quindi $d_n \rightarrow +\infty$
 il che è assurdo

Schema generale: zona A a sx di una zona B

A e B sono aperte

unicità del fizio in mezzo

— o — o —

ANALISI 1 - LEZIONE 090

Note Title

19/03/2026

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$ $x_1 = \alpha > 0$

Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $\boxed{x_{n+1}} = \frac{x_n^2}{n} \rightarrow \frac{l^2}{+\infty} = 0$

$\downarrow$
 l

$l=0$ è l'unico limite $\in \mathbb{R}$ compatibile. C'è anche $l=+\infty$

$$A = \{ \alpha : x_n \rightarrow 0 \}$$

$$B = \{ \alpha : x_n \rightarrow +\infty \}$$

Fatto 1 $A \neq \emptyset$

$$1 \in A$$

$$(i) x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

(ii) carabiniere

$$0 \leq x_{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \ddot{\smile}$$

FATTO 2 $B \neq \emptyset$

$$2026 \in B$$

Shett. cresc.? $x_{n+1} \stackrel{?}{\geq} x_n \Leftrightarrow \frac{x_n^2}{n} \stackrel{?}{\geq} x_n \Leftrightarrow x_n \stackrel{?}{\geq} n$

$\uparrow$
so solo $x_n \geq 2026$

Se metto $x_n \geq n$ al p.to 1, questa per induzione NON la dimostro

Dimostro che $x_n \geq 2n \quad \forall n \geq 1$

... P.I. ... $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{4n^2}{n} = 4n \geq 2(n+1) \quad \ddot{\smile}$

FATTO 3 Se $a \in A$, anche quelli + piccoli $\in A$
Se $b \in B$, " grandi $\in B$



FATTO 4 A è aperto. Se $x_n(a) \rightarrow 0$, allora

$$\exists n_0 \geq 1 \quad \text{t.c.} \quad x_{n_0+1}(a) < x_{n_0}(a)$$

Per $n \geq n_0$ è per forza decrescente

$$x_{m+2} = \frac{x_{m+1}^2}{m+1} \leq \frac{x_m^2}{m+1} \leq \frac{x_m^2}{m} = x_{m+1}$$

Se $x_{m+1}(a) < x_m(a)$, allora lo stesso vale per gli a "vicini" e quindi anche per un certo $\bar{a} > a$.

Quindi $c \notin A$.

FATTO 5 $c \in B$

La succ. non può avere colpi di decrescenza, quindi è deb. cresc., quindi ha limite, ma di $L \in \mathbb{R}$ non ce ne sono a disposizione, quindi $L = +\infty$.

Esercizio hard Determinare ordine di ∞ della succ. che parte da c .

Esempio 2 $x_{m+1} = \frac{x_m^2}{m!}$

Esistono x_1 per cui $x_n \rightarrow +\infty$?

$x_m \geq (m!)^2$ si può dim. per induzione? Forse bastava $x_m \geq 4m \cdot (m!)$

$$x_{m+1} = \frac{x_m^2}{m!} \geq \frac{(m!)^4}{m!} = (m!)^3 \geq [(m+1)!]^2$$

Questa per m abb. grande è vera e quindi basta fare a mano i primi termini.

Morale: funziona anche con $x_{m+1} = \frac{x_m^{1+\text{poco}}}{m!}$

Esercizio Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^1
 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\alpha) = \alpha$ e $|f'(\alpha)| < 1$
 Allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c.

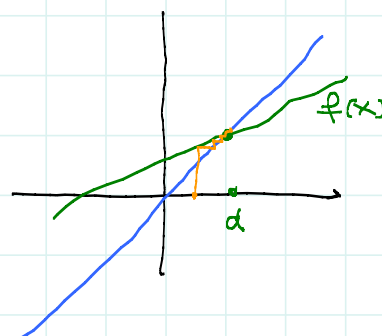
La successione

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

tende ad α per ogni

$$x_0 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

(se punto abbastanza vicino ad α ,
 allora tende ad α)



Dim Poiché $|f'(\alpha)| < 1$, allora esistono $m < 1$ ed $\varepsilon > 0$ t.c.
 $|f'(x)| \leq m \quad \forall x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

Da qui in poi basta usare il picco con la distanza.

Se $x_0 \in [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, allora

$$(i) \quad x_n \in \dots \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

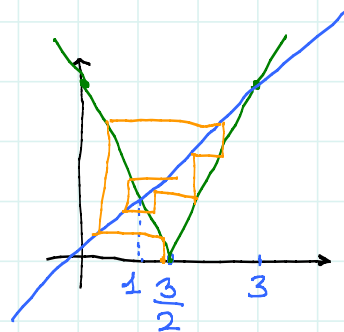
$$(ii) \quad |x_{n+1} - \alpha| \leq m |x_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow f \text{ è } m\text{-lip. in } [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$$

$$(iii) \quad |x_n - \alpha| \leq m^n |x_0 - \alpha|$$

$$(iv) \quad x_n \rightarrow \alpha$$

Esempio $x_{n+1} = |2x_n - 3| \quad x_0 = \sqrt{2}$

Idea: x_n non ha limite!



FATTO 1 $0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Basta osservare che $f([0, 3]) = [0, 3]$, cioè

$$0 \leq f(x) \leq 3 \quad \forall x \in [0, 3]$$

FATTO 2 Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l \in \{1, 3\}$

FATTO 3 Se $x_n \in [0, \frac{3}{2}]$, allora $|x_{n+1} - 1| \geq |x_n - 1|$

Infatti $|x_{n+1}-1| = |3-2x_n-1| = 2|x_n-1|$
 $\uparrow$
 so che è 1
 in $x \in [0, \frac{3}{2}]$

FATTO 4 Se $x_n \in [\frac{3}{2}, 3]$, allora $|x_{n+1}-3| \geq |x_n-3|$

Infatti $|x_{n+1}-3| = |2x_n-3-3| = 2|x_n-3| \quad \sim$

FATTO 5 Può $x_n \rightarrow 1$?

NO! Definitivamente sarebbe $x_n \in [0, \frac{3}{2}]$, ma allora
 defn. $|x_{n+1}-1| \geq |x_n-1|$
 $\uparrow$
 posso anche mettere 2

Per lo stesso motivo non può $x_n \rightarrow 3$?

FATTO 6 Devo solo escludere che $x_n = 1$ oppure $x_n = 3$
 definitivamente

Non si può perché per induzione $x_n = a_n\sqrt{2} + b_n$
 con a_n e b_n interi e $a_n \neq 0$.

— 0 — 0 —