

Esercizio 1 Dimostrare che e è irrazionale

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Supponiamo per assurdo che $e = \frac{a}{b}$ con a e b interi.

$$\frac{a}{b} = e = \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}$$

Moltiplico per $b!$. Ottengo

$$\underbrace{a \cdot (b-1)!}_{\text{intero}} = \underbrace{b! \sum_{n=0}^b \frac{1}{n!}}_{\substack{\text{intero perché} \\ b! \text{ semplifica} \\ \text{tutti i denomi}}} + b! \sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}$$

quindi anche

$$b! \sum_{n \geq b+1} \frac{1}{n!}$$

deve essere intero. Ma noi dimostriamo che è positivo (ovvio) e < 1 . Questo sarà assurdo.

Stiamo dall'atto 2a serie

$$b! \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots$$

$$\leq \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \dots$$

geometrica

$$= \frac{1}{b+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^i} = \frac{1}{b+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b} < 1 \text{ se } b > 1$$

D'altra parte se $b=1$, sarebbe e intero, ma $2 < e < 3$.

Oss. Quello che fa funzionare la dim. è che la serie converge MOLTO velocemente, cioè la coda della serie è piccola anche moltiplicata per il mcm dei denominatori precedenti

Esercizio 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \sin(2\pi e \cdot n!).$$

↑
sorpresa: sono tutti vicinissimi a 0 sulla circ. trigonometrica

Dall'esercizio precedente sappiamo che

$$m!e = \underbrace{m! \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!}}_{\text{intero}} + m! \sum_{i \geq m+1} \frac{1}{i!}$$

$$\text{Quindi } 2\pi e \cdot m! = 2\pi \left(\text{intero} + m! \sum_{i \geq m+1} \frac{1}{i!} \right)$$

$$\sin(2\pi e \cdot m!) = \sin \left(\underbrace{2\pi m! \sum_{i \geq m+1} \frac{1}{i!}}_{\text{Questo tende a 0}} \right)$$

$$2\pi m! \sum_{i \geq m+1} \frac{1}{i!} = 2\pi \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots \right) = \frac{2\pi}{m+1} + o\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$\text{cioè } 2\pi \left(\frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \dots \right) = o\left(\frac{1}{m}\right)$$

e questo si fa con la stima di prima

$$\leq \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^3} + \dots \quad \text{e si stima con la geometrica}$$

conclusion

$$\sin(2\pi e n!) \sim \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \sim \frac{2\pi}{n+1}$$

e quindi moltiplicato per n tende a 2π !

INSIEME STRANO 1 Esistono aperti "piccolissimi" che contengano tutto $\mathbb{Q}$

I razionali sono numerabili, cioè esiste una succ. che contiene tutti i razionali.

Sia $q_1, q_2, q_3, \dots$ una numerazione dei razionali

Considero $A = \bigcup_{n \geq 1} \left(q_n - \frac{1}{2026^n}, q_n + \frac{1}{2026^n} \right)$

È aperto perché unico di aperti.

Quanto è la sua "lunghezza"?

$$\leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{2026^n} = 2 \frac{1}{2026} \frac{1}{1 - \frac{1}{2026}} = \frac{2}{2025}$$

↑ molti pezzi si sovrappongono

↑ raccolgo il 1° termine

↑ piccolissimo

FUNZIONI STRANE 1 $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{Q}$ -spazio vettoriale

Quindi esiste una base di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$ spazio vettoriale.

Indichiamo con $\{v_i\}_{i \in I}$

Nella base ne isolò uno che chiamo v_1 e un secondo che chiamo v_2 .

Ogni reale x lo scrivo come

$$x = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \text{altra roba (piccola)}$$

Definisco

$$f_1(x) = c_1 v_1$$

$$f_2(x) = x - f_1(x)$$

Osservo che $f_1(x) + f_2(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

La funzione f_1 è v_2 -periodica (e anche v_1 periodica purché $v_1 \neq v_2$)

La funzione f_2 è v_1 -periodica.

Quindi abbiamo due funzioni periodiche che sommate danno x .

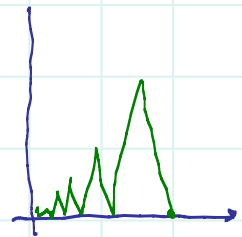
FUNZIONI STRANE 2 Sia $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continua.

È possibile che per ogni $\lambda \in [0,1]$, l'eq.

$$f(x) = \lambda$$

ha infinite soluzioni?

Se fosse per un valore posso usare
roba tipo $x \lfloor \sin \frac{1}{x} \rfloor$



Fatto 1 (Hard) Se chiedo Lipschitz è impossibile

Fatto 2 In generale si può (con ogni Hölder di ordine < 1)

Trucco: usare rappresentazioni in basi strane!

→ Prendo x scritto in base 10 come $0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$

→ Traduco la rappresentazione in base 2 in qualche modo

(ad esempio: cifre pari $\mapsto 0$, cifre dispari $\mapsto 1$)

→ Definisco $f(x) =$ il nuovo numero

Questa funziona! Soggettiva (facile), ogni controimmagine è ∞
continua (tante cifre = in partenza $\mapsto$ tante cifre =
in arrivo)

— 0 — 0 —

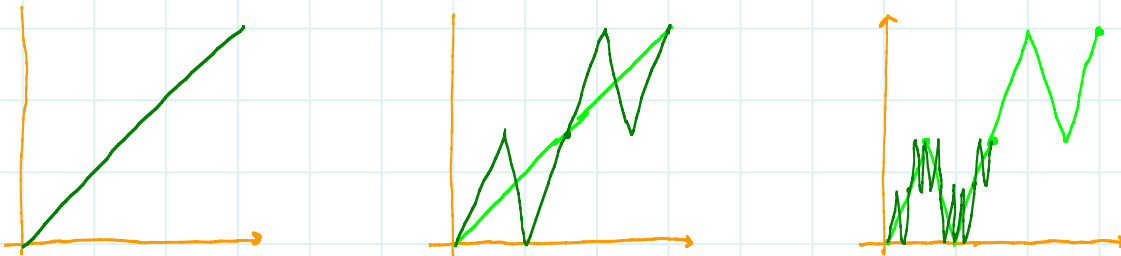
Aggiunto dopo video : mi hanno fatto notare che la funzione risultante non è continua, per colpa dei numeri che finiscono con tanti 9.

Per esempio : $f(0.4) = 0$

$f(0.39999) = [0.11111]_2$ cioè circa 1

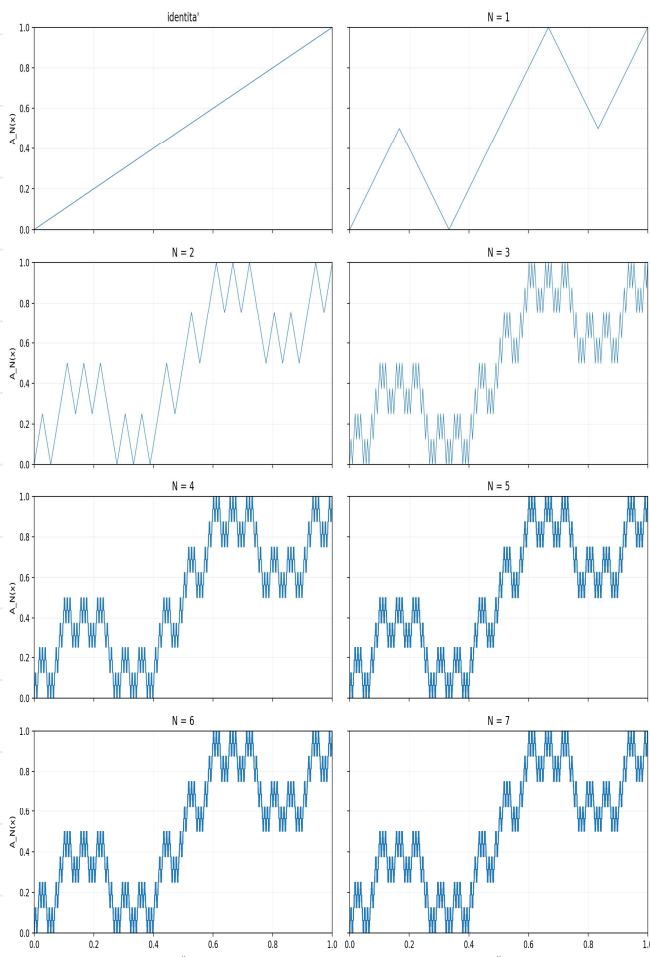
e la cosa si generalizza con quanti 9 voglio.

Temo quindi che non si possa fare usando così facilmente le cifre, ma temo che bisogna usare la costruzione alla Hilbert, di cui qui disegno i primi step



Morale: ogni volta si divide in 6 ogni tratto precedente e si sostituisce con una spezzata opportuna, in su o in giù

Spezzate affini per nodi 'identita' e prime 7 sostituzioni



Qui accanto più o meno quello che viene fuori dopo un po' di iterazioni.

La formula generale dovrebbe essere questa, ottenuta dopo un po' di iterazioni con una unica anima 😊

Se $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$

allora

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sigma(a_k) \right) \frac{\varphi(a_k)}{2^k}$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi(a_k) &= 0, 1, 0, 1, 2, 1 \\ \sigma(a_k) &= 1, -1, 1, 1, -1, 1 \end{aligned} \pmod{6}$$