

Esistenza di $\mathbb{R}$: sezioni di Dedekind + molte verifiche

Unicità. Detto bene: $\mathbb{R}$ è una coppia $(\mathbb{R}, \leq)$ dove $\mathbb{R}$ è un campo e $\leq$ è una relazione d'ordine compatibile con le operazioni di campo per cui vale l'assioma di continuità.

Se $(\mathbb{R}, \leq)$, allora esiste $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (i) φ è iniettiva e surgettiva
- (ii) φ è iso di campi (commuta con le operazioni)
- (iii) se $x \leq y$, allora $\varphi(x) \leq \varphi(y)$

Come costruisco φ ?

→ Intanto $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$

→ poi entrano in gioco le "iniezioni", cioè vedere $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (vanno costruite

$i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce come

$$i(0) = 0$$

$$i(S(m)) = i(m) + 1$$

e poi con pazienza si costruiscono le stesse su $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$)

→ possiamo $\varphi(n) = n$, cioè $\varphi(i(m)) = i(m)$

e quindi abbiamo definito φ sull'immagine di $\mathbb{N}$.

→ Poi si estende all'immagine di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$

→ Si mostra che φ manda semirette sinistre di $\mathbb{Q}$ in semirette sinistre di $\mathbb{Q}$ ed il gioco è fatto.

Dopo averla definita, restano da verificare le proprietà.

— o — o —

Frazioni razionali cioè polinomio / polinomio

Parto da $\mathbb{R}[x]$ anello dei polinomi e faccio la stessa costruzione che ha portato a $\mathbb{Q}$. Ottengo un campo.

Su questo campo posso definire una relazione d'ordine

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \geq \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{se e solo se la disug. vale per ogni } x \text{ abbastanza grande}$$

Si verifica che la relazione è compatibile con le op. algebriche

Qui non possono valere

→ assioma di continuità

→ proprietà archimedeo

Assioma continuità

A = polinomi costanti

B = polinomi bx con $b > 0$

Si verifica che nessuno può stare in mezzo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq c \rightsquigarrow \frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow +\infty \rightsquigarrow \deg(P) > \deg(Q)$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < bx \rightsquigarrow \frac{P(x)}{xQ(x)} < b \rightsquigarrow \deg(Q) \geq \deg(P)$$

Proprietà archimedeo

$$P(x) = 2026$$

$$Q(x) = x$$

$P(x) \geq 0$, $Q(x) \geq 0$, ma non esiste un multiplo INTERO di $P(x)$ che supera $Q(x)$.

— 0 — 0 —

BRAVATA 1

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Parto dall' integrale Gaussiano $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Per a positivo calcolo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{a}} dy = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{a}x = y$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{a}} dy$$

Il cambio di variabili nell' integrale improprio si giustifica

Ora prendo $a=i$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{1}{\sqrt{i}} \sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1+i} \sqrt{\pi} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi}$$

Uguagliando parte reale e immaginaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{Per parità divido per 2.}$$

BRAVATA 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ le radici (event. complesse con molteplicità)

Quanto fanno

$$\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} = ?$$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n^2} = ?$$

Basta osservare che $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sono le radici di $P(\frac{1}{x})$, cioè alla fine le radici di

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots$$

Quindi $\sum \frac{1}{\lambda_i} = -\frac{a_1}{a_0}$ $\sum \frac{1}{\lambda_i^2} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2 \frac{a_2}{a_0}$

Pseudo $f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Quali sono le radici di $f(x)$? $\pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$

Quindi :

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 n^2} = -2 \frac{a_2}{a_0} = +2 \cdot \frac{1}{6} \quad \dots \text{ è vero!}$$

$$\boxed{\text{BRANATA 3}} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \arctan a_n \\ a_0 = 2026 \end{cases}$$



$a_m \rightarrow 0$ Ma con quale parte principale?

$$\underbrace{a_{m+1} - a_m}_{\text{derivata della succ.}} = \arctan a_m - a_m$$

$$u' = \arctan u - u \approx -\frac{1}{3}u^3$$

Questa da so risolvere $u' = -\frac{1}{3}u^3$ so $\frac{u'}{u^3} = -\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} = -\frac{1}{3} t \quad \leadsto \quad \frac{1}{u^2} = \frac{2}{3} t \quad \leadsto \quad u = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Quindi $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Facciamo per bene: $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = [\text{Cesaro-Stolz}]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n \tan^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2}} \quad [a_n \rightarrow 0]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 \arctan^2 x}{x^2 - \arctan^2 x}}{\frac{x^4}{x^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^4}} = \frac{3}{2}$$