

Insiemi numerici : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Def. I numeri naturali sono una terna $(\mathbb{N}, 0, s)$ dove

- $\mathbb{N}$ è un insieme
- $0 \in \mathbb{N}$
- $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che (moralmente è il successivo)

(i) s è iniettiva

(ii) l'immagine di s è $\mathbb{N} \setminus \{0\}$

(iii) $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ se

- $0 \in A$

- $\forall m \in \mathbb{N} \quad m \in A \Rightarrow s(m) \in A$

allora $A = \mathbb{N}$.

} no junk
no confusion

} induzione

Esercizio Pensare a strutture strane senza la (ii)



Teorema I naturali esistono e sono unici a meno di isomorfismi.

Cioè se $(\hat{\mathbb{N}}, \hat{0}, \hat{s})$ sono altri naturali, allora

esiste $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \hat{\mathbb{N}}$ tale che

- φ è iniettiva e surgettiva
- $\varphi(0) = \hat{0}$
- $\varphi(s(m)) = \hat{s}(\varphi(m)) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Idea dim

Esistenza : praticamente un assioma della teoria degli insiemi.

Unicità Come definisco la φ ? Usando le ultime due richieste.

Devo accertarmi che sia ben definita, iniettiva e surgettiva.

[Alcune parole nel video]

Operazioni su $\mathbb{N}$

Addizione $a + 0 = a$
 $a + s(m) = s(a + m)$ } definisce $a + m \quad \forall a \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Esercizio : Dimostrare che è commutativa e associativa
(hint: è una pena)
(Natural Number Game in LEAN)

Moltiplicazione $a \cdot 0 = 0$
 $a \cdot s(m) = a \cdot m + a$

Solite comode proprietà da dimostrare

Relazione d'ordine $a \leq b$ se e solo se $\exists c \quad a + c = b$
— 0 — 0 —

Definizione di $\mathbb{Z}$ Via possibile $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \text{coppie } (n, \text{segno})$
con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, segno $\in \{+, -\}$

Via canonica: moralmente $z \in \mathbb{Z}$ è differenza di 2 tizi di $\mathbb{N}$

Prendo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e metto la relazione

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \iff n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$
$$n_1 - m_1 = n_2 - m_2$$

Verifica: si tratta di una relazione di equivalenza.

A questo punto

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \quad [\text{classi di equivalenza}]$$

Devo definire le operazioni

$$[(a_1, b_1)] + [(a_2, b_2)] = [(a_1 + a_2, b_1 + b_2)]$$

z_1

z_2

Occorre far vedere che è ben posta, cioè non dipende dai rappresentanti, quindi passa al quoziente

$$[(a_1, b_1)] \cdot [(a_2, b_2)] = [(a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)]$$

$(a_1 - b_1) \quad (a_2 - b_2)$

Si verifica la buona positura e tutte le proprietà di somma e prodotto.

— o — o —

Def. di $\mathbb{Q}$ Pseudo coppia $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ ($0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

Dico

$$(a, b) \sim (\hat{a}, \hat{b}) \iff \frac{a}{b} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}}$$

Verifico che è una rel. di equivalenza e chiamo $\mathbb{Q}$ il quoziente

Poi definisco le operazioni: $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$$

Verifico la buona positura e tutti gli assiomi di campo.

— o — o —

Def. di $\mathbb{R}$ Via breve: DEDEKIND CUTS (sezioni di $\mathbb{Q}$.)

Chiamo semiretta sinistra un sottoinsieme A di $\mathbb{Q}$ con queste proprietà

- A ammette almeno un maggiorante
- se $a \in A$ e $b \leq a$, allora $b \in A$
- A non ammette massimo ($\forall a \in A \exists b \in A \ b > a$)

(è una semiretta "aperta")

A questo punto $\mathbb{R}$ = insieme delle semirette sinistre di $\mathbb{Q}$

Devo definire le operazioni

→ semplice per la somma ($A_1 + A_2$ = somma possibile coppie)

→ pena per il prodotto (i seguenti sono un problema)

~ verifica che è un campo

Mi serve un ordinamento (conclusione insiemistica di semirette)

Serve l'assioma di continuità (moralmente il sup di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è il reale corrispondente all'unione delle semirette corrispondenti agli elementi)

— o — o —