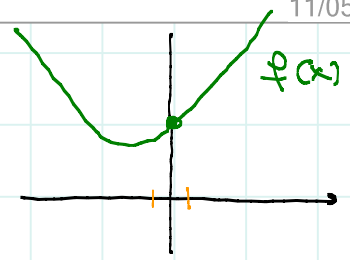


Esercizio 1 $f(x) = x^2 + e^x$



(1) Dimostrare che è invertibile in un intorno di 0

Esiste $\delta > 0$ ed esiste $r_1 > 0, r_2 > 0$ t.c. $f: [-\delta, \delta] \rightarrow [1-r_1, 1+r_2]$

è iniettiva e surgettiva

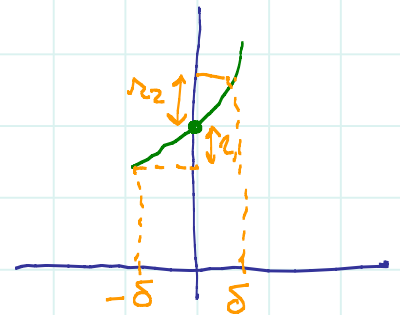
$f'(0) = 1$ (lo vedo da Taylor :) $\leadsto$ esiste $\delta > 0$ t.c. $f'(x) \geq \frac{1}{2}$ per ogni $x \in [-\delta, \delta]$.

A quel p.to pongo

$$f(-\delta) = 1 - r_1$$

$$f(\delta) = 1 + r_2$$

Iniettività e surgettività sono garantite da monotonia e teo. exist. zero



(2) Detta g l' inversa, calcolare $g(1)$, $g'(1)$ e $g''(1)$.

$$g(1) = 0, \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \leadsto \quad g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

↑
formula per
inversa

$$g''(x) = - \frac{1}{[f'(g(x))]^2} \cdot \underbrace{f''(g(x)) \cdot g'(x)}_{\text{sostituisco}} = - \frac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$$

↑
derivata
g'(x)

Quando metto $x=1$ viene $-\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = -f''(0) = -3$

Oss. Teoricamente posso andare avanti con $g^{(3)}, \dots, g^{(k)}$

(3) Calcolare lo sviluppo di Taylor di $g(x)$ con centro in $x=1$.

$$g(1+h) = g(1) + g'(1) \cdot h + \frac{1}{2} g''(1) h^2 + \frac{1}{6} g'''(1) h^3 + \dots$$

Senza calcolare le derivate esplicitamente.

$$g(1+h) = ah + b h^2 + c h^3 + d h^4 + o(h^4)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$1+h = f(g(1+h)) = f(ah + b h^2 + c h^3 + d h^4 + o(h^4))$$

$$= 1 + \underbrace{ah + b h^2 + c h^3 + d h^4}_x + \frac{3}{2} (a^2 h^2 + b^2 h^4 + 2ab h^3 + 2ach^4) + \frac{1}{6} (a^3 h^3 + 3a^2 b h^4) + \frac{1}{24} (a^4 h^4) + o(h^4)$$

$$a = 1 \quad (\text{coeff } h)$$

$$b + \frac{3}{2} a^2 = 0 \quad (\text{coeff } h^2) \quad \leadsto b = -\frac{3}{2}$$

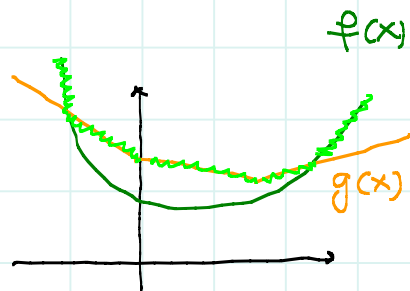
$$c + 3ab + \frac{1}{6} a^3 = 0 \quad (\text{coeff } h^3) \quad \leadsto \text{trovo } c$$

...

$\leadsto \text{trovo } d$

Esercizio 2 Il max tra due convesse è convesso?

Sembra di sì ☺



Dim Prendo f e g e pongo

$$m(x) = \max \{ f(x), g(x) \}$$

$$\text{Claim: } m(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda m(x) + (1-\lambda)m(y)$$

$$\text{wlog: } \text{LHS} = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$\uparrow$
 f convessa

$$\leq \lambda m(x) + (1-\lambda)m(y)$$

$\uparrow$
 $f \leq m, \lambda \text{ e } 1-\lambda \geq 0$

Esercizio 2 bis Il sup di una famiglia qualunque di convesse
è convesso (supposto che il sup venga reale)

Prendo una famiglia $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ di funz. convesse.

Pongo $S(x) := \sup \{f_i(x) : i \in I\}$

Non funziona il WLOG di prima.

Però... per ogni $i \in I$

$$\begin{aligned} f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f_i(x) + (1-\lambda)f_i(y) \\ &\leq \lambda S(x) + (1-\lambda)S(y) \end{aligned}$$

Adesso che RHS è fisso, posso fare il sup del LHS e ottenere

$$S(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \text{RHS} \quad \ddot{\smile}$$

Oss. Una f è convessa $\Leftrightarrow$ il sopragrafico è convesso in $\mathbb{R}^2$

Il sopragrafico dell' $\cap$ è l' $\cap$ dei sopragrafici

L'intersezione di convessi è convessa

— o — o —

[VF1] Se $0 \leq b_n \leq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\sum b_n$ converge, allora di sicuro $\sum a_n$ converge

MA CHE DICI!

[VF2] $\forall x \in \mathbb{R} \exists M \in \mathbb{R}$ tale che $x^{77} \geq M$

✓ Prendo $M = x^{77}$

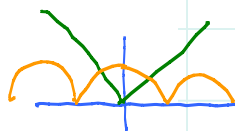
[VF3] La funzione $f(x) = \cos^3 x$ è dispari

✗ è pari $\ddot{\smile}$

[VF4] $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32$

✓

[VF5] L'equazione $|x| = |\cos(3x)|$ ha almeno una soluzione reale



✓

[VF6] La soluzione generale dell'equazione differenziale $u'' = 4u$ è $u(t) = ae^{2t} + be^{-2t}$

$\lambda^2 = 4$ $\lambda = \pm 2$ ✓

[VF7] Se $a_n \rightarrow 4$, allora di sicuro $a_{n!} \rightarrow 4$

✓ sottosucc!

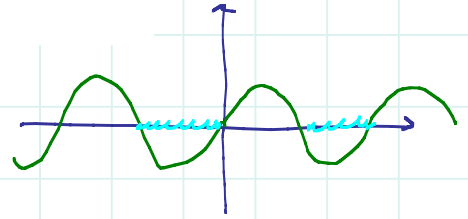
[VF8] $\arctan(x - x^4) = x + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

✗! $\arctan(x - x^4) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

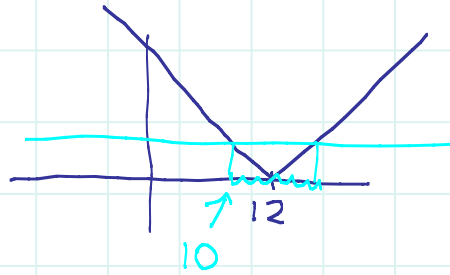
MC1 Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq 0\}$.

Determinare quale delle seguenti affermazioni sull'insieme A è vera.

- (A) A è limitato superiormente (B) esiste $\min A$ (C) $\sup A \in \mathbb{R}$ ~~(D) $6\pi \in A$~~
(E) A ammette minoranti



$$\inf \{x \in \mathbb{R} : |x - 12| \leq 2\} = \dots$$



[Test risolti a voce nel video]