

DARBOUX VS RIEMANN Problema: definire $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$

dove $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa due ipotesi:

- (i) $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (f limitata)
- (ii) $\exists [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0$ per ogni $x \notin [a, b]$ (f nulla fuori da un limitato)

Tre possibili approcci

→ DARBOUX INCLUSIVO

→ DARBOUX ORTODOSSO

→ RIEMANN

Darboux inclusivo Step function = funzioni a gradino

$$I_{DI}^+(f) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx : \begin{array}{l} \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \varphi \text{ step function} \end{array} \right\}$$

$$I_{DI}^-(f) := \sup \{ \dots \quad \varphi(x) \leq f(x) \dots \}$$

Se coincidono, allora $\int$

Darboux ortodossa Si parte da una partizione P , cioè

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad (n \text{ dipende da } P)$$

e si pone

$$S_{DO}^+(f, P) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup \{ f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$S_{DO}^-(f, P) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf \{ f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

Moralmente: costruisco step function sopra e sotto risparmiando il più possibile

Assumiamo sempre per semplicità $x_0 \leq a$ e $x_n \geq b$

A questo punto possiamo definire

$$I_{\text{Do}}^+(f) := \inf \{ S_{\text{Do}}^+(f, P) : P \text{ partizione} \}$$

$$I_{\text{Do}}^-(f) := \sup \{ S_{\text{Do}}^-(f, P) : P \text{ partizione} \}$$

Oss. Nella definizione DI ho "due gradi di libertà" (partizione + altezze dei rettangoli in ogni intervallo)

Nella def. DO ho "un solo grado di libertà" (partizione, poi le altezze sono automatiche).

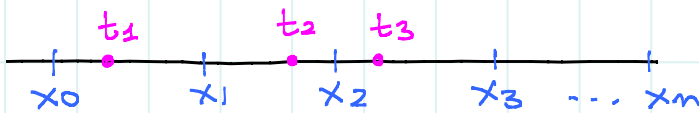
RIEMANN

Def 1 Si dice diametro di una partizione P il numero

$$\text{diam}(P) := \max \{ x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n \}$$

↑ max lung. di un intervallo

Def 2 Si dice partizione taggata e si indica con (P, T) una partizione $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ e una scelta di p.ti $T = (t_1, \dots, t_n)$ con $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$



Def 3 Data una part. taggata (P, T) , Riemann definisce

$$S_R(P, T) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

↑
somma di
Riemann

Integrale di una step function
che ogni intervallo vale
 $f(t_i)$

Def (Integrale di Riemann)

Si dice che f è integrabile secondo Riemann se esiste $I \in \mathbb{R}$ (che a posteriori sarà l'integrale) tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (P, T) \quad \text{diam}(P) \leq \delta \Rightarrow |I - S_R(P, T)| \leq \varepsilon$$

(morale: le somme di Riemann sono vicine a I quando $\text{diam}(P)$ è abbastanza piccolo, indipendentemente da T)

Oss 1 Non usa mai la struttura di ordine in $\mathbb{R}$ (si estende a contesti più generali)

Oss 2 Come scritta, non produce integrali inferiori o superiori (esercizio: si può modificare in modo da produrli?)

TEOREMA Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con le due proprietà fondamentali. Allora le 3 definizioni di integrale sono equivalenti

Dim $DI \Leftrightarrow DO$ Più in generale sono equivalenti i loro integrali inferiori e superiori.

Vediamo per i superiori

→ è ovvio che $S_{DI}^+(f) \leq S_{DO}^+(f)$

(sto facendo inf sulle step funct. inclusive che sono di più di quelle ortodosse)

→ è quasi ovvio che $S_{DO}^+(f) \leq S_{DI}^+(f)$

(per ogni s.f. inclusiva, ne trovo una ortodossa con integrale $\leq$, perché uso la stessa partizione e risparmio sulle altezze)

Diam $R \Rightarrow DO$ Sia I l'integrale di Riemann.

Dico che I è anche l'integrale di Darboux

Basta dim. che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione P t.c.

$$\begin{array}{c} I-\varepsilon \quad I \quad I+\varepsilon \\ | \quad \cdot \quad | \quad \cdot \quad | \end{array}$$

$$S_{DO}^+(f, P) \leq I + \varepsilon$$

$$S_{DO}^-(f, P) \geq I - \varepsilon$$

Basta prendere P in modo che $\text{diam}(P) \leq \delta$, dove $\delta > 0$ è quello che corrisponde a ε nella definizione di Riemann.

Infatti sappiamo che, quando $\text{diam}(P) \leq \delta$, allora

$$I - \varepsilon \leq S_R(P, T) \leq I + \varepsilon \quad \text{per ogni tag } T$$

Scegliendo τ opportuni in ogni intervallo di P , posso fare in modo che $S_f(P, T)$ si avvicini quanto voglio a $S_{DO}^+(f, P)$ oppure $S_{DO}^-(f, P)$.

Morale: le somme di DO sono particolari somme di R, corrispondenti a tag opportuni).

Parte dura: $DO \Rightarrow R$ Ipotesi: f integrabile DI, cioè per i noti criteri di integrabilità

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ tali che
 $\uparrow$ step functions $\uparrow$

$$\int \psi(x) dx \leq I + \frac{1}{2} \varepsilon$$

$\uparrow$
int. di DI

$$\int \varphi(x) dx \geq I - \frac{1}{2} \varepsilon$$

$\uparrow$
int. di DI

Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e voglio trovare $\delta > 0$ per cui funziona Riemann, cioè

$$|S_R(P, T) - I| \leq \varepsilon \quad \text{se } \text{diam}(P) \leq \delta$$

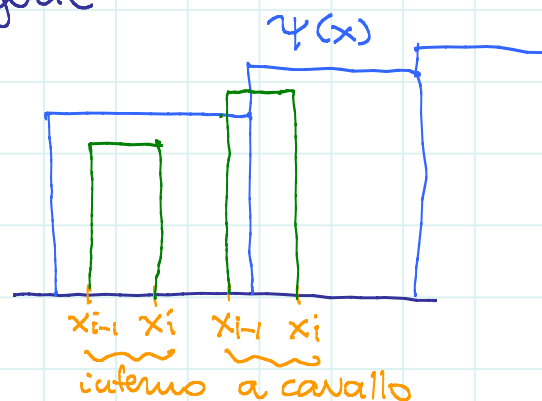
Wlog posso supporre che φ e ψ prendano valori in $[-M, M]$ e che siano definite a partire da una stessa partizione Q con un certo numero m di p.ti.

Dico che basta prendere

$$\delta \leq \text{diam}(Q) \quad \text{e} \quad \delta \leq \frac{1}{(m+1)(M+1)} \frac{1}{8} \varepsilon$$

Perché funziona? Prendiamo $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ con $\text{diam} \leq \delta$
Dividiamo gli intervalli in due categorie

$I_{\text{int}} = \{i \in \{1, \dots, m\} : [x_{i-1}, x_i] \text{ è interno ad un intervallo della partizione } Q\}$



$C_{\text{av}} = \{i \in \{1, \dots, m\} : [x_{i-1}, x_i] \text{ è a cavallo}\}$

Adesso

$$S_R(P, T) := \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) \varphi(t_i)$$

$$= \sum_{\substack{i \in I_{\text{int}} \\ x_i}} (x_i - x_{i-1}) \varphi(t_i) + \sum_{i \in C_{\text{av}}} (x_i - x_{i-1}) \varphi(t_i)$$

$$\leq \int_{x_{i-1}} \psi(x) dx + (m+1) \delta M$$

$\swarrow$ perché $\varphi(t_i) \leq \psi(t_i)$ $\uparrow$ # int. a cav. $\uparrow$ max $x_i - x_{i-1}$ $\nwarrow$ max $\varphi(t_i)$

$$= \underbrace{\int \psi(x) dx}_{\leq I + \frac{1}{2} \varepsilon} - \underbrace{\sum_{i \in C_{\text{av}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi(x) dx}_{\leq \sum_{i \in C_{\text{av}}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\psi(x)| dx} + \underbrace{(m+1) \delta M}_{\leq \frac{1}{8} \varepsilon}$$

$$\leq (m+1) \delta M$$

$$\leq \frac{1}{8} \varepsilon$$

$$\leq I + \varepsilon \quad (\text{forse bastava } \frac{1}{4} \text{ invece di } \frac{1}{8}),$$

— 0 — 0 —