

Come dimostro che $f(x)$ NON è derivabile in un certo x_0 dato?

MODO STANDARD Faccio vedere che il rapporto incrementale non ha limite

Esempio $f(x) = |\sin x|$ $x_0 = 0$

Da destra $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$

Da sinistra $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\sin h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1$

GRANDE TENTAZIONE $f(x) = \sin x$ per $x \in (0, \pi)$
 $f'(x) = \cos x$ per $x \in (0, \pi)$

$f(x) = -\sin x$ per $x \in (-\pi, 0)$

$f'(x) = -\cos x$ per $x \in (-\pi, 0)$

Ora osservo che

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$

e quindi $f'(0)$ NON esiste

C'è un buco logico: nessuno impedisce a $f'(0)$ di esistere e di essere diversa dai limiti.

In realtà è vero perché

Fatto generale $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$
 se questo esiste

Dim $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{h \cdot f'(c(h))}{h}$ $x_0 < c(h) < x_0 + h$
 $\downarrow$
 x_0^+

$\uparrow$
Lagrange

Passando al limite per $h \rightarrow 0$ ho la tesi

Stessa cosa vale a x_0^- .

Domanda: esistono funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili ovunque ma con derivata discontinua

S1 Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

È ovvio che $f'(x)$ esiste per $x \neq 0$

È facile che $f'(0)$ esiste perché $f(0) = 0$ e $f(x) = O(x^2)$ per $x \rightarrow 0$
(basterebbe $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$)

Inoltre $f'(0) = 0$ per il conto appena fatto.

Per $x \neq 0$:

$$f'(x) = \underbrace{2x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\downarrow 0} + \underbrace{x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\downarrow}$$

per colpa di questo il limite per $x \rightarrow 0$ non esiste

PROPRIETÀ DI DARBOUX DELLE DERIVATE

Supponiamo $f: (x_0-r, x_0+r) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ovunque.

Allora

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

Dim $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(c(h))$

$\uparrow$
compreso tra x_0 e x_0+h

Ora basta fare $\liminf$ e $\limsup$ a dx e sx,

Oss. Perché non posso fare il liminf a dx e sx e dedurre che

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \liminf_{h \rightarrow 0} f'(c(h)) \\ &= \liminf_{x \rightarrow x_0} f'(x) \end{aligned}$$

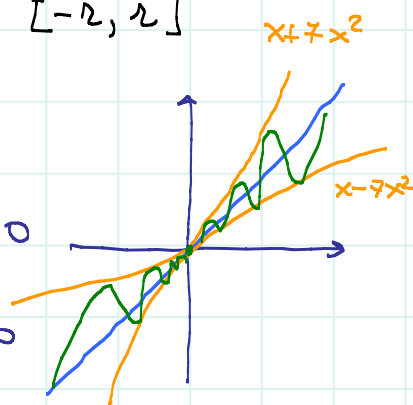
Il problema è l'ultima uguaglianza perché $f'(c(h))$ è in qualche modo una s.succ. di $f'(x)$ e quindi l'ultimo = in realtà è $\geq$ e salta tutto.

Con il limsup è dalla parte giusta.

Esempio Funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile ovunque, $f'(0) = 1$
 f non monotona in nessun intervallo $[-\epsilon, \epsilon]$
wlog $f(0) = 0$.

Prendo

$$f(x) = \begin{cases} x + 7x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



È derivabile ovunque? Sì: $f(x) = x + 7 \cdot$ esempio precedente
 $f'(0) = 1$

È anche ovvio che $f(x) > 0$ per $x > 0$ piccolo
 $f(x) < 0$ per $x < 0$ piccolo

Se fosse monotona in $[-\epsilon, \epsilon]$ avremmo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-\epsilon, \epsilon]$

Ma

$$f'(x) = \underbrace{1 + 14x \sin \frac{1}{x}}_0 + 7 \cancel{x^2} \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}} \right)$$

Per $x \rightarrow 0$, $f'(x)$ oscilla tra -6 e 8 , quindi ci sono tanti
intervallini vicini a 0 in cui f è decrescente !!!
— 0 — 0 —