

SIMBOLI DI LANDAU Setting : $D \subseteq \mathbb{R}$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad g: D \rightarrow \mathbb{R}$$

 x_0 p.to di acc. per D (vale con opportune modifiche anche
con $x_0 = +\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$)

Si dice che

 $\rightarrow f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se posso scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \forall x \in D \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0$$

 $\rightarrow f(x) \sim g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se ...

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 1$$

 $\rightarrow f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se ...e w limitata in un intorno
di x_0 cioè esistono $r > 0$ e $M \in \mathbb{R}$ tali che

$$|w(x)| \leq M \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap D$$

Equivalentemente

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} |w(x)| \in \mathbb{R}$$

Oss. Quando posso dividere, le definizioni coinvolgono limiti di

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

Esempi 1 $\sin x = O(x)$ per $x \rightarrow 0$? OK $\sin x \sim x$ per $x \rightarrow 0$? OK $\sin x^2 = O(x^2)$ per $x \rightarrow 0$? OK $\sin x^2 = O(x)$ per $x \rightarrow 0$? OK

Fatto 1 $f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$
 $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$

Esempi 2 $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + O(x^5)$ OK

Devo fare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x + \frac{x^3}{3}}{x^5} = \frac{1}{5}$

Fatto generale Taylor

$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ vera

$f(x) = P_n(x) + O(x^n)$ vera ma buffa

$f(x) = P_n(x) + O(x^{n+1})$ quasi sempre vera
↑
vera se f ammette $P_{n+1}(x)$

Moralmente : $O(x^n)$ si mangia tutte le potenze (per $x \rightarrow 0$)
con esponente $> n$.

$O(x^n)$... esponente $\geq n$.

Esercizio Supponiamo $f(x) = O(g(x))$ per $x \rightarrow 0$
 $g(x) = o(R(x))$ per $x \rightarrow 0$

Allora $f(x) = o(R(x))$

$f(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$

ω_1 limitata vicino a 0

$g(x) = R(x) \cdot \omega_2(x)$

$\omega_2(x) \rightarrow 0$

Allora

$f(x) = R(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x) \cdot \omega_1(x)}_{\omega_3(x) \rightarrow 0}$

Discorso analogo se $f(x) = o(g(x))$
 $g(x) = O(R(x))$

Restatement Se $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è unif. cont., allora
 $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow +\infty$

Dim A suo tempo abbiamo visto che $|f(x)| \leq Ax + B$
Ma allora

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{Ax+B}{x} = A$$

$\nearrow$
 $g(x)$

Esercizio $f(x) = \int_0^x e^{\sin t} dt$

Cosa possiamo dire del comportamento per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$?

Brutal mode: $f(x) \sim \int_0^x 1 dt \sim x$

Rigoroso: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \underset{\text{H\ddot{o}p}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = 1$

Risposta: $f(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$ anche $f(x) = O(x)$ per $x \rightarrow 0$

Brutal mode $0 \leq f(x) \leq \int_0^x e dt = ex$ quindi $f(x) = O(x)$
per $x \rightarrow +\infty$

In realtà quello che ho scritto è rigoroso!

Questo basta per dire che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \underbrace{\frac{f(x)}{x}}_{\leq e} \cdot \frac{1}{x}$$

Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

$$f(x) \geq \int_0^x e^{-t} dt = \frac{x}{e}$$

Quindi se $f(x) \sim cx$, allora $\frac{1}{e} \leq c \leq e$

CLAIM: $c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{sit} dt$ (questo è quanto guadagna ogni periodo)

Tentativo: sappiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (visto che $f(x) \geq \frac{x}{e}$)

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{s i x} = \text{N.E.}$
 $\uparrow$
 $\frac{+\infty}{+\infty} \leadsto \text{Hop}$

[Achtung! Non posso dedurre nulla quando il $\lim \frac{f'}{g'}$ N.E.]

Come dimostro il claim?

Prendo x e sia n tale che $2\pi(n) \leq x \leq 2\pi(n+1)$

Allora $f(x) = \int_0^x e^{sit} dt \leq \int_0^{2\pi(n+1)} e^{sit} dt = \underbrace{2\pi c}_{\substack{\uparrow \\ \text{valore} \\ \text{in ogni} \\ \text{periodo}}} \underbrace{(n+1)}_{\substack{\text{numero} \\ \text{dei periodi}}}$

quindi $f(x) \leq 2\pi c (n+1) \leq 2\pi c \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right)$
 $\uparrow$
 $2\pi n \leq x$

Analogamente dal basso

$$f(x) \geq 2\pi c n \geq 2\pi c \frac{x-2\pi}{2\pi}$$

Quando divido per x trovo

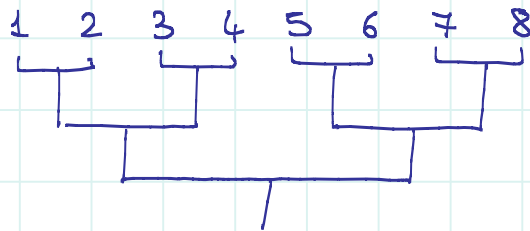
$$\underbrace{2\pi c \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right) \frac{1}{x}}_c \leq \frac{p(x)}{x} \leq \underbrace{2\pi c \left(\frac{x}{2\pi} + 1 \right) \frac{1}{x}}_c$$

Esempio Se voglio ordinare n numeri, quanti confronti devo fare

Risposta easy : $O(n)$ (in realtà $n-1$)

Risposta migliore : $O(n)$ in realtà $\lceil \log_2 n \rceil$
 ↑
 parte intera superiore

Faccio il torneo a eliminazione diretta



Tutto questo solo per trovare il più grande

Le cose cambiano se voglio trovare l'ordinamento completo

→ risposta easy : $O(n^2)$

→ risposta migliore : $O(m \log m)$

— 0 — 0 —