

Dim. Teo. 2

$$W_m := \prod_{k=1}^m \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$I_m := \int_0^{\pi} \sin^m x \, dx$$

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

Step 1 Relazione tra I_m e W_m

Pongo $\hat{R}_m := \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}}$. Osservo che $\hat{R}_0 = \frac{I_1}{I_0} = \frac{2}{\pi}$

Uso che $I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1}$ e $I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2}$

quindi

$$\begin{aligned} \hat{R}_m &= \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m-1} \frac{2m}{2m-1} \frac{1}{I_{2m-2}} \\ &= \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \hat{R}_{m-1} \end{aligned}$$

Da questa segue che

$$\begin{aligned} \hat{R}_m &= \frac{2m \cdot 2m}{(\cdot)(\cdot)} \cdot \hat{R}_{m-1} = \frac{2m \cdot 2m}{(\cdot)(\cdot)} \frac{(2m-2)(2m-2)}{(\cdot)(\cdot)} \hat{R}_{m-2} \\ &= \dots = W_m \cdot \hat{R}_0 = W_m \cdot \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\hat{R}_m = W_m \cdot \frac{2}{\pi}$$

fare induzione

Quindi teo 2 $\Leftrightarrow \hat{R}_m \rightarrow 1$

Step 2 $\hat{R}_m = \frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \rightarrow 1$

Si fa con i carabinieri

$$\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} \leq 1 \quad \text{ovvio perché}$$

$$I_{2m+1} = \int_0^\pi (\sin x)^{2m+1} dx \leq \int_0^\pi (\sin x)^{2m} dx = I_{2m}$$

cioè I_m è debolmente decrescente.

Per il bound dal basso

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} I_{2m}, \text{ quindi}$$

$$\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}} = \frac{2m}{2m+1} \boxed{\frac{I_{2m}}{I_{2m}}} \geq \frac{2m}{2m+1}$$

Num. $\geq$ Den.

In conclusione $\frac{2m}{2m+1} \leq \hat{R}_m \leq 1$ e si conclude

— 0 — 0 —

Lemma (Asintotica di I_m)

$$I_m \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m}}, \text{ cioè } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{m} I_m = \sqrt{2\pi}$$

Dim Basta farlo separatamente sui pari e sui dispari, cioè

$$\sqrt{2m} I_{2m} \rightarrow \sqrt{2\pi} \quad \sqrt{2m+1} I_{2m+1} \rightarrow \sqrt{2\pi}$$

Facciamo sui pari. Bisogna trovare formule per I_{2m} .

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} = \dots = I_0 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2m} \cdot \frac{\text{Den}}{\text{Den}} \\ &= \pi \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \end{aligned}$$

Dimostro per induzione che
$$I_{2m} = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \cdot \pi$$

Ora moltiplico per $\sqrt{2m}$ e sostituisco

$$n! = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \frac{1}{S_n}$$

$$(2m)! = \frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2m} \frac{1}{S_{2m}}$$

Otengo

$$\begin{aligned} \sqrt{2m} I_{2m} &= \sqrt{2m} \underbrace{\frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2m} \frac{1}{S_{2m}}}_{(2m)!} \cdot \underbrace{\frac{1}{S_{2m}} \cdot \frac{e^{2m} S_m^2}{n^{2m} \cdot m}}_{\frac{1}{(m!)^2}} \cdot \pi \\ &= 2\pi \frac{S_m^2}{S_{2m}} \end{aligned}$$

da cui $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sqrt{2m} I_{2m} = 2\pi S_\infty = 2\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$

Per il caso dispari si può o rifare il conto, o più semplicemente osservare che

$$\sqrt{2m+1} I_{2m+1} = \boxed{\sqrt{2m+1}} \cdot \boxed{\frac{I_{2m+1}}{I_{2m}}} \cdot \boxed{I_{2m} \cdot \sqrt{2m}} \cdot \boxed{\frac{1}{\sqrt{2m}}} \rightarrow \sqrt{2\pi}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\hat{R}_m \rightarrow 1$ $\sqrt{2\pi}$
 $\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$

Dim. Teo. 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Step 1

$$1-x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

A sx è la solita $e^t \geq 1+t$. A dx è $(1+x)e^{-x} \leq 1$ per $x \geq 0$ e questo si fa con un facile studio di funzioni

Step 2

Uso step 1 con $x=t^2 \geq 0$. Otengo

$$1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Elevo alla n e ottengo

$$(1-t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

Corretto dopo video: vale solo per $t \in [-1, 1]$,
ma ci basta :)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Integro tra -1 e 1

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \leq \int_{-1}^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

LHS CHS RHS

Osservo che

$$\text{CHS} = \int_{-1}^1 e^{-nt^2} dt = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \frac{1}{\sqrt{n}} dx$$

$\uparrow$
 $\sqrt{n}t = x$

Quindi

$$\text{CHS} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$$

$\downarrow$ integrale Gaussiano

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \stackrel{\substack{\uparrow \\ t = \cos x}}{=} \int_{\pi}^0 (1-\cos^2 x)^n (-\sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi} (\sin x)^{2n+1} dx = I_{2n+1} \end{aligned}$$

Manca

$$\text{RHS} = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

Lo so: pongo $t = \frac{1}{\tan x}$
gli estremi vengono $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
e in mezzo ci sta 0 (x)

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\pi}{2} - \arctan \varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^{2n} \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

Pongo davvero $t = \frac{1}{\tan x}$

$$1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\tan x} \rightsquigarrow \tan x = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\rightsquigarrow x = \arctan \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} - \arctan \varepsilon$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 x} = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$dt = -\frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\pi}{4} - \varepsilon}^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} (\sin x)^{2m-2} dx$$

$$= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m-2} dx \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2m-2} dx = \int_0^{\pi} (\sin x)^{2m-2} dx = I_{2m-2}$$

Morale: $RHS = I_{2m-2}$

Conclusione: Moltiplico $LHS \leq CHS \leq RHS$ per $\sqrt{m}$ e ottengo

$$\sqrt{m} I_{2m+1} \leq \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{m} I_{2m-2}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m+1}}} \boxed{\sqrt{2m+1} I_{2m+1}} \downarrow \downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2m-2}}} \boxed{\sqrt{2m-2} I_{2m-2}} \downarrow \downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2\pi}$$

Oss. Per l'integrale Gaussiano c'è una dimostrazione di Analisi 2 basata sugli integrali doppi

Esercizio Provare a dim. direttamente che $I_m \rightarrow 0$
(non basta dire che $(\sin x)^m \rightarrow 0$, perché non è completamente vero, ad esempio per $x = \frac{\pi}{2}$).