

Teo 1 (Formula di STIRLING)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

il rapporto $\rightarrow 1$

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

rapporto $\rightarrow 1^+$

Teo 2 (Prodotto di WALLIS)

$$W_n := \prod_{k=1}^n \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$W_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Teo 3 (Integrale Gaussiano)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Dim. teo 1 Poigo $S_n := \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \frac{1}{n!}$

La tesi equivale a $S_n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e $S_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Step 1 $S_n \rightarrow S_\infty \in (0, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{Poigo } R_n &:= \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \sqrt{n+1} \frac{1}{(n+1)n!} \frac{\cancel{e^n} \cancel{n!}}{n^n \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ora osservo che $S_n = S_1 \cdot R_1 \cdot \dots \cdot R_{n-1}$ (prodotto telescopico)

$$= S_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} R_k$$

Conseguenza: $S_n \rightarrow S_\infty \in (0, +\infty)$ se e solo se

$\prod_{k=1}^{\infty} R_k$ converge ad un numero $\in (0, +\infty)$

Questa converge se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} \log R_k$ converge

$$\text{Ora } \log R_m = \log \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) - 1$$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m^3} + o\left(\frac{1}{m^3}\right)\right) - 1$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2m}} + \frac{1}{3m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) + \cancel{\frac{1}{2m}} - \frac{1}{4m^2} - \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{12m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

Quindi la serie converge per C.A. con $\frac{1}{m^2}$

STEP 2 Per dimostrare che $S_n \leq S_\infty$ basta dire che S_n è cresc., cioè $R_m > 1$ per ogni m , cioè $\log R_m > 0$ per ogni m , cioè

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) - 1 > 0 \quad \text{per ogni } m$$

Dal Taylor $\log R_m \sim \frac{1}{12m^2}$ sappiamo che è > 0 per m grande, ma noi lo vorremmo per ogni m .

Prima idea: se come funzione di m fosse decrescente...

[Probabilmente funziona: provare a calcolare la derivata]

Seconda idea: considero $g(x) = \log x$, funzione concava

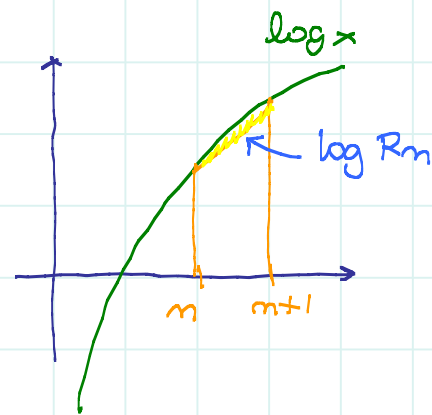
$$\int_m^{m+1} \log x \, dx \geq \text{Area trapezio}$$

$$\frac{1}{2} (\log m + \log(m+1))$$

$$[x \log x - x]_m^{m+1}$$

$$(m+1) \log(m+1) - (m+1) - m \log m + m$$

$$= (m+1) \log(m+1) - m \log m - 1$$



Mettendo insieme: $(m+1) \log(m+1) - m \log m - 1 \geq \frac{1}{2} \log m + \frac{1}{2} \log(m+1)$
cioè

$$(m + \frac{1}{2}) \log(m+1) - (m + \frac{1}{2}) \log m - 1 \geq 0$$

$$\underbrace{(m + \frac{1}{2}) \log(\frac{m+1}{m}) - 1}_{\log R_m} \geq 0$$

STEP 3 Formula per W_m

$$W_m = \prod_{k=1}^m \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1) \cdot (2m+1)} \cdot \frac{\text{Num}}{\text{Num}}$$

$$= \frac{[2^m \cdot m!]^4}{(2m+1) [(2m)!]^2}$$

Formula: $W_m = \frac{[2^m \cdot m!]^4}{(2m+1) [(2m)!]^2}$

Formalmente si dimostra per induzione.

STEP 4 Nella formula sostituisco $m! = \frac{n^m}{e^m} \sqrt{m} \frac{1}{S_m}$

e analogamente $(2m)! = \frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}} \sqrt{2m} \frac{1}{S_{2m}}$

Ottengo

$$W_m = \frac{2^{4m} \cdot n^{4m}}{e^{4n}} \cdot n^2 \cdot \frac{1}{S_m^4} \cdot \frac{1}{(2m+1)} \cdot \frac{e^{4n} S_{2m}^2}{(2n)^{4m} \cdot 2m}$$

$$W_m = \frac{n^2}{2m(2m+1)} \cdot \frac{S_{2m}^2}{S_m^4}$$

$\downarrow$ $\frac{\pi}{2}$ (teo 2) $\downarrow$ $\frac{1}{4}$ $\downarrow$ $\frac{1}{S_\infty^2}$

Quindi $\frac{1}{S_\infty^2} = 2\pi$, cioè $S_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ☺

— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare che $W_m \rightarrow W_\infty \in (1, +\infty)$
è prodotto di roba ≥ 1

$$W_m = \prod_{k=1}^m \frac{2k \cdot 2k}{(2k-1)(2k+1)} \quad \text{converge se e solo se}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{4k^2}{4k^2-1}\right) \text{ converge, cioè } - \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right) \text{ converge}$$

Adesso $\log\left(\frac{4k^2-1}{4k^2}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \sim -\frac{1}{4k^2}$

e quindi la serie converge per confronto asintotico

— 0 — 0 —

Esercizio Pongo

$$I_m := \int_0^\pi \sin^m x \, dx$$

Ossevo che $I_0 = \int_0^\pi 1 \, dx = \pi$ e $I_1 = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2$

Integrando per parti

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \sin^n x \, dx = \int_0^\pi \underbrace{\sin x}_F \cdot \underbrace{\sin^{n-1} x}_G \, dx \\ &= \underbrace{[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x]_0^\pi}_{=0 \text{ per colpa di } \sin x} - \int_0^\pi \underbrace{(-\cos x)}_F (n-1) \underbrace{\sin^{n-2} x}_g \cdot \cos x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^\pi \sin^n x \, dx \end{aligned}$$

Grande ritorno! Abbiamo ottenuto

$$n I_n = (n-1) I_{n-2}$$

Formula ricorsiva

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

— 0 — 0 —