

LEMMA 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ CONVESSO (= connesso in $\mathbb{R}$)

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ debolmente monotona.

Allora

f è continua $\Leftrightarrow f(A)$ è convesso

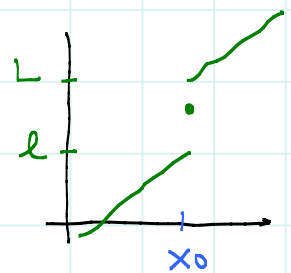
Dim $\Rightarrow$ teorema dei valori intermedi

$\Leftarrow$ Facciamo wlog il caso f debolmente crescente.

Supponiamo f non continua in un certo $x_0 \in \text{Int}(A)$ (bisognerebbe poi fare il caso in cui $x_0 \in \partial A$, ma è uguale). Allora

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 esistono per monotonia



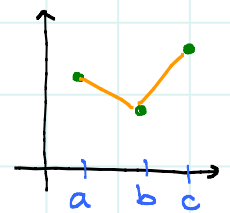
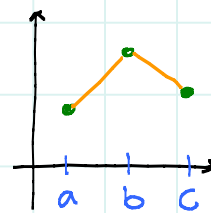
Ma allora l'immagine $f(A)$ non può contenere più di un pto in $[l, L]$, e quindi $f(A)$ non è convesso.

Lemma 2 (Lemma del triangolino)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione NON monotona.

Allora esistono $a < b < c$ in D per cui vale una delle seguenti

- $f(b) > f(a)$ e $f(b) > f(c)$
- $f(b) < f(a)$ e $f(b) < f(c)$



Dim Non lo so fare
(rapida)

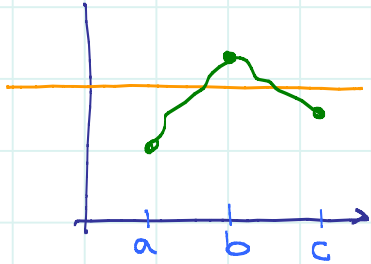
— o — o —

Lemma 3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile.

Allora f è strett. monotona.

Dim. Se non fosse deb. monotona, saremmo in uno scenario del lemma del triangolino. Pensiamo wlog il primo



Scego λ tale che

$$\lambda < f(b) \quad \lambda > f(a) \quad \lambda > f(c)$$

e trovo una violazione di iniettività

Una volta che è deb. monotona lo è pure strett.

— o — o —

Dim. teo. 2 A convesso, $f: A \rightarrow B$ continua e invertibile

- Per il lemma 3 è strett. monotona e $B = f(A)$ è convesso
 - Per Q1 $g: B \rightarrow A$ è strett. monotona e B è convesso
 - Per il lemma 1 g è continua $\Leftrightarrow g(B)$ è convesso
- Ma $g(B) = A$ $\therefore$

— o — o —

Oss. Tutte le inverse classiche ricadono nel teo 1 e/o teo. 2

— o — o —

Q3 NO $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^3$ derivabile in $x=0$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$ non derivabile in $x=0$

Teorema Sia $f: A \rightarrow B$ invertibile

Sia $g: B \rightarrow A$ l' inversa

Sia $x_0 \in \text{Int}(A)$ e sia $y_0 = f(x_0)$

Supponiamo che $f'(x_0)$ esista e $f'(x_0) \neq 0$.

Allora

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

NON DIM

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$\begin{matrix} \text{"} \\ [x]' \\ \text{"} \\ 1 \end{matrix}$

$$\leadsto g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \leadsto x = x_0$$

DIM Devo fare

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \quad \begin{matrix} x_0 \\ \text{"} \\ y_0 \end{matrix} \nearrow f(x_0)$$

Pongo $y = f(x)$, cioè $x = g(y)$. Quando $y \rightarrow y_0$ ho che $x \rightarrow x_0$ (qui sto usando la continuità dell'inversa)

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Q4 Prop. Se $f: A \rightarrow B$ è C^1 e invertibile e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora g è C^1 in B e

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \forall x \in B$$

Dim Conseguenza della **Q3**

Q5 Prop. Se $f: A \rightarrow B$ è C^k e invertibile e $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora g è C^k

[Morale: l'unico ostacolo è sulla derivata prima]

DIM **BOOTSTRAP** $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

$$f \in C^1 \Rightarrow g \in C^1. \quad \text{Se } f \in C^2 \Rightarrow f' \in C^1 \Rightarrow \frac{1}{f'(g(x))} \in C^1$$

$$\Rightarrow g' \in C^1 \Rightarrow g \in C^2$$

Se $f \in C^3 \rightsquigarrow f' \in C^2 \rightsquigarrow \frac{1}{f'(g(x))} \in C^2 \rightsquigarrow g' \in C^2 \rightsquigarrow g \in C^3$

e così via.

— o — o —

Esempio Sia u la soluzione del pb. di Cauchy

$$u'(t) = \arctan(u(t)) \quad u(0) = 2026$$

Dico che $u \in C^\infty$

Dim $u \in C^1$ per il teo. di esistenza

$$\rightsquigarrow \arctan u \in C^1 \rightsquigarrow u' \in C^1 \rightsquigarrow u \in C^2$$

$$\rightsquigarrow \arctan u \in C^2 \rightsquigarrow u' \in C^2 \rightsquigarrow u \in C^3$$

e così via.

— o — o —

Derivata della funzione composta

NON DIM

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

$$\downarrow y = f(x)$$

$$\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

$$\downarrow g'(f(x_0))$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\downarrow f'(x_0)$$

Problema: ma sto molt./div. per 0?

Dim Prendo una succ. $x_n \rightarrow x_0$. Ci sono due casi

- esiste una sottosucc. $x_{n_k} \rightarrow x_0$ su cui $f(x_{n_k}) \neq f(x_0)$

Su quella il conto brutale funziona

- esiste una sottosucc. $x_{n_k} \rightarrow x_0$ su cui $f(x_{n_k}) = f(x_0)$ sempre

allora $f'(x_0) = 0$, quindi in particolare $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0$.

Ma su quella successione anche

$$\frac{g(f(x_{n_k})) - g(f(x_0))}{x_{n_k} - x_0} \rightarrow 0 \quad (\text{Num} \equiv 0)$$

e quindi tende comunque a $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

— 0 — 0 —