

PROPRIETÀ FUNZIONI CONVESSE

Teorema (Convessità vs derivata prima)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso **APERTO** e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile.

Allora

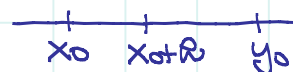
f convessa $\Leftrightarrow f'$ debolm. crescente

f strett. convessa $\Leftrightarrow f'$ strett. crescente

Dim $\Rightarrow$ Siano $x_0 < y_0$ due p.ti di C .

Claim

$$f'(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'(y_0)$$



Per il lemma dei 3 rapporti

$$r(x_0, x_0 + R) \leq r(x_0, y_0)$$

$\downarrow$
 $f'(x_0)$ quando $R \rightarrow 0^+$

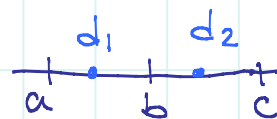


Analogamente $r(x_0, y_0) \leq r(y_0 - R, y_0)$
 $\downarrow$
 $f'(y_0)$ quando $R \rightarrow 0^+$

$$\text{N.B. } r(y_0 - R, y_0) = \frac{f(y_0) - f(y_0 - R)}{R} = \frac{f(y_0 - R) - f(y_0)}{-R}$$

$\Leftarrow$ Uso il lemma dei due rapporti. Per dim. che f è convessa basta dim. che

$$\underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{f'(d_1)} \leq \underbrace{\frac{f(c) - f(b)}{c - b}}_{f'(d_2)}$$



Per la monotonia di f' sappiamo che $f'(d_1) \leq f'(d_2) \quad \square$

Teoremi (convessità vs derivata seconda)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e APERTO, e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile almeno due volte.

Allora

$$\begin{aligned} f \text{ convessa} &\iff f'' \geq 0 \text{ in } C \\ f \text{ strett. conv.} &\iff f'' > 0 \text{ in } C \end{aligned}$$

Esempio $f(x) = x^4$ è strett. conv. in $\mathbb{R}$, ma $f''(x)$ si annulla per $x=0$.

$$\begin{aligned} \text{Dim} \quad f \text{ convessa} &\iff f' \text{ debolm. crescente} \iff f'' \geq 0 \text{ in } C \\ &\quad \uparrow \text{teo. prec.} \quad \uparrow \text{Monotonia 2} \\ f \text{ strett. conv.} &\iff f' \text{ strett. crescente} \iff f'' > 0 \text{ in } C \\ &\quad \uparrow \text{teo. prec.} \quad \uparrow \text{Monotonia 2} \end{aligned}$$

Teoremi ... $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in C$ e $f''(x) = 0$ sporadicamente (non in un intero intervallo), allora f strett. conv.

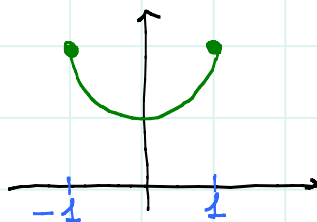
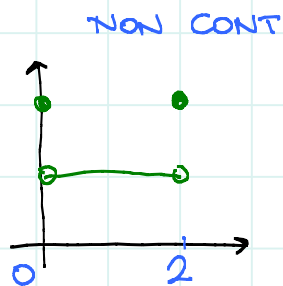
$$\text{Dim} \quad f'' \geq 0 + \text{annull. sporadico} \Rightarrow f' \text{ strett. cresc.} \iff f \text{ strett. conv.}$$

$\uparrow$ Monotonia 3 $\uparrow$ teo. prec.

Oss. Le funzioni convesse NON sono obbligate ad essere derivabili.

Esempio $f(x) = |x|$

Oss. Le funzioni convesse non sono obbligate ad essere continue, e quando lo sono non sono obbligate ad essere Lipschitz



← CONT. MA NON LIP

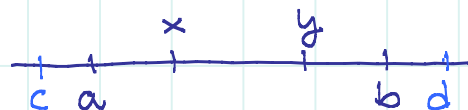
Teorema (Convessità vs continuità)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

Allora

- f è continua in $\text{Int}(C)$
- f è localmente Lipschitz in $\text{Int}(C)$, cioè f è lip. in ogni intervallo $[a, b] \subseteq \text{Int}(C)$
 $\uparrow$ resta lontano dal bordo di C

Dim Basta dimostrare la seconda



Prendiamo $[a, b] \subseteq C$

Scegliamo $c < a$ e $d > b$ tali che $[a, b] \subseteq [c, d] \subseteq C$.

Per ogni scelta di $x < y$ in $[a, b]$ vale che

$$\begin{array}{ccccc} r(x, y) & \leq & r(x, d) & \leq & r(b, d) \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{Monot.} & & \text{Monot.} & \\ & 2^{\text{a}} \text{ variabile} & & 1^{\text{a}} \text{ variabile} & \end{array}$$

$$r(x, y) \geq r(c, y) \geq r(c, a)$$

da cui

$$r(c, a) \leq r(x, y) \leq r(b, d)$$

e di conseguenza

$$|r(x, y)| \leq \max \{ |r(c, a)|, |r(b, d)| \}$$

Numero L che va bene per ogni $x < y$ in $[a, b]$

Questo ci dice che

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L \quad \forall$$

— o — o —

Le funzioni convesse hanno un po' di derivata?

Def. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \text{Int}(A)$.

Poniamo

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

DERIVATA DESTRA

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

DERIVATA SINISTRA

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso e $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ convessa

Allora

- (1) $\forall x_0 \in \text{Int}(C)$ esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$
- (2) Quelle di sopra soddisfanno $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$
- (3) $x \mapsto f'_+(x)$ e $x \mapsto f'_-(x)$ sono deb. crescenti
- (4) $f'_+(x)$ è continua a destra, cioè $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_+(x)$
 $f'_-(x)$ è continua a sinistra

Dim (1) Basta osservare $r(x_0, x_0+h)$ è deb. cresc. in h
 $r(x_0-h, x_0)$ idem

(2) Basta osservare che

$$r(x_0-k, x_0) \leq r(x_0-k, x_0+h) \leq r(x_0, x_0+h)$$

Considero la disug. di dx e faccio
lim per $h \rightarrow 0^+$. Otengo

$$\begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \hline x_0-k \quad x_0 \quad x_0+h \end{array}$$

$$r(x_0-k, x_0) \leq f'_+(x_0)$$

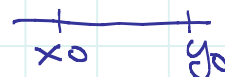
Ora faccio il limite per $k \rightarrow 0^+$ e viene

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$

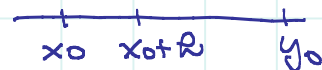
(3) Devo dimostrare che $f'_+(x_0) \leq f'_+(y_0)$ per ogni $x_0 < y_0$
Dimostro molto di più, cioè

$$f'_+(x_0) \leq r(x_0, y_0) \leq f'_-(y_0) \leq f'_+(y_0)$$

$\uparrow$
fatta prima

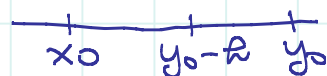


Per quella di dx usiamo che



$$r(x_0, x_0 + h) \leq r(x_0, y_0) \quad \text{e facciamo } h \rightarrow 0^+$$

Per quella di sx usiamo che



$$r(x_0, y_0) \leq r(y_0 - h, y_0) \quad \text{e facciamo } h \rightarrow 0^+.$$

— o — o —