

FUNZIONI CONVESSE

Def. (Combinazione convessa) Siano $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Una comb. conv. di x e y è un numero che si scrive nella forma

$$\lambda x + (1-\lambda)y \quad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

Oss. Lo stesso concetto si può estendere con x, y e sp. vettoriale

Fatto 1 Al variare di $\lambda \in [0,1]$, le comb. conv. di x e y descrivono tutto il segmento di estremi x e y
(stessa cosa in ogni spazio vettoriale)

Dim. Supponiamo wlog $x < y$.

$$\begin{aligned} \underline{1^\circ \text{ fatto}} \quad & \left. \begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &\leq \lambda y + (1-\lambda)y = y \\ \lambda x + (1-\lambda)y &\geq \lambda x + (1-\lambda)x = x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{uso che } \lambda \geq 0 \\ &\text{e } 1-\lambda \geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

2° fatto Se $x \leq z \leq y$, allora esiste $\lambda \in [0,1]$ t.c.

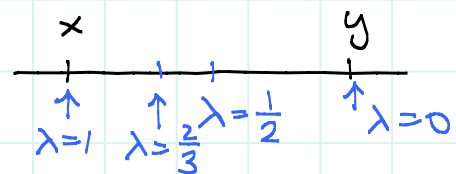
$$z = \lambda x + (1-\lambda)y$$

Basta risolvere $\lambda(x-y) = z-y$, cioè

$$\lambda = \frac{y-z}{y-x}$$



Oss. La comb. convessa, quando λ va da 0 ad 1, percorre il segmento da y verso x



Def. Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se

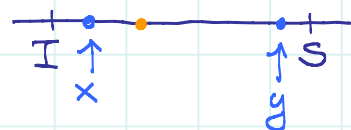
$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

Fatto I convessi $C \subseteq \mathbb{R}$ rientrano in queste categorie

- tutto $\mathbb{R}$
- semirette $(-\infty, a), (-\infty, a], [a, +\infty), (a, +\infty)$
- intervalli $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$
- p.ti singoli $\{a\}$
- vuoto

Idea: prendo $I := \inf C$, $S := \sup C$ e dimostro che ogni elemento compreso tra I ed S sta in C .

I ed S possono starci oppure no



Def. (Geometrica) Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso.

Una funzione $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se, per ogni coppia di p.ti del grafico, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico.

Def. (Ufficiale) Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso.

Una funzione $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se

$$\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

↑
 f (comb. convessa)

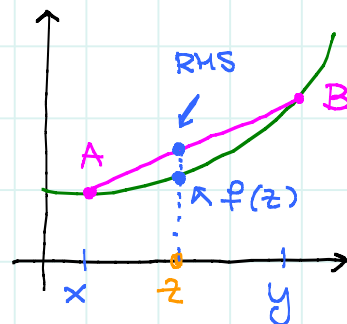
↑
comb. conv. di
 $f(x)$ e $f(y)$ con
lo stesso λ

Def. ... strett. convessa se vale $<$ quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$.

Def. ... concava (o strett. concava) .. stessa cosa con $\geq$
(alternativa: dire che $-f$ è convessa)

Oss. Nella def. analitica il LHS è il valore di f nella comb. conv. $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

Dico che RHS = valore in z della retta che congiunge i p.ti A e B



Conto di percorso: retta AB $\bar{y} = f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (\bar{x} - x)$

Quando sostituisco $\bar{x} := \lambda x + (1-\lambda)y$, trovo

$$\begin{aligned} \bar{y} &= f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (\lambda x + (1-\lambda)y - x) \\ &= f(x) + (1-\lambda)(f(y) - f(x)) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

Lemma 1 (Lemma dei 3 rapporti incrementali)

Sia $C \subseteq \mathbb{R}$ convesso, e sia $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

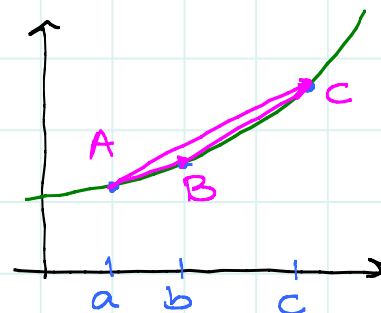
Allora f è convessa se e solo se, per ogni terna $a < b < c$ in C , vale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Lemma 2 (Lemma dei 2 rapporti)

... f è convessa se e solo se, per ogni terna $a < b < c$ in C , vale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$



Notazione: se $x < y$ poniamo $\uparrow$ $r(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$
rapp. incr. tra x e y

Oss. Il Lemma 1 ci dice che

→ fissato x , la funzione $y \rightarrow r(x, y)$ è deb. cresc.

→ fissato y , " $x \rightarrow r(x, y)$ è deb. cresc.

Dim. lemmi

Conversa $\Rightarrow$ 3 rapporti

Dimostro disug. di dx , e l'altra è uguale

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \Leftrightarrow \quad (b \text{ as } x, c \text{ ed } a \text{ as } dx)$$

$$f(b) \frac{1}{c-b} \leq f(c) \underbrace{\left(\frac{1}{c-b} - \frac{1}{c-a} \right)}_{\frac{b-a}{(c-b)(c-a)}} + \frac{1}{c-a} f(a)$$

$$\Leftrightarrow f(b) \leq \underbrace{\frac{b-a}{c-a}}_{1-\lambda} f(c) + \underbrace{\frac{c-b}{c-a}}_{\lambda} f(a)$$



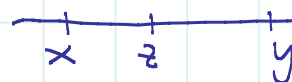
Se $b = (1-\lambda)c + \lambda a$, allora è proprio la disug. nella def.

$$(1-\lambda)c + \lambda a = \frac{b-a}{c-a} \cdot c + \frac{c-b}{c-a} \cdot a = \frac{bc - ac + ca - ba}{c-a} = b \quad \checkmark$$

2 rapporti $\Rightarrow$ conversa

Devo dimostrare che

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$



Suppongo wlog $x < y$ e pongo $z = \lambda x + (1-\lambda)y$

Scrivo i 2 rapporti con $x < z < y$

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad \text{cioè}$$

$$f(z) \left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z} \right) \leq \frac{1}{z-x} f(x) + \frac{1}{y-z} f(y)$$

cioè

$$f(z) \frac{y-x}{(z-x)(y-z)} \leq \frac{1}{z-x} f(x) + \frac{1}{y-z} f(y)$$

cioè

$$f(z) \leq \underbrace{\frac{y-z}{y-x}}_{\lambda} f(x) + \underbrace{\frac{z-x}{y-x}}_{1-\lambda} f(y) \quad (\text{basta sostituire})$$

— o — o —