

Teorema (Non più misterioso) Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua.

Allora  $f$  è integrabile in  $[a, b]$ .

Dim Devo dim. che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esistono due step function

$\varphi_\varepsilon$  e  $\psi_\varepsilon$  tali che

$$\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

e

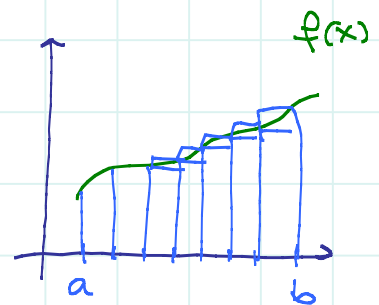
$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)) dx \leq \varepsilon.$$

Mi viene dato  $\varepsilon > 0$ . Essendo  $f$  u.c. per H.C. so che esiste  $\delta > 0$  t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Costruisco  $\varphi_\varepsilon$  e  $\psi_\varepsilon$  usando una partizione con tutti intervallini lunghi  $\leq \delta$  e scegliendo in ogni intervallo

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_\varepsilon = \min \\ \psi_\varepsilon = \max \end{array} \right\} \text{ esistono per W.}$$



Ora in ogni intervallo  $\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$  (sono due valori assunti in 2 p.ti a distanza  $\leq \delta$ ) e quindi

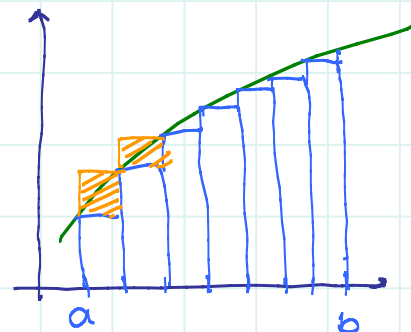
$$\int_a^b (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon \quad \square$$

Oss. Se so, per esempio, che  $f$  è  $\alpha$ -Hölderiana in  $[a, b]$ , allora ho una stima dell'errore che commetto quando approssimo un integrale con una somma inferiore/superiore

Divido  $[a, b]$  in pezzi di lung.  $\leq \delta$ , e poi calcolo la somma delle aree dei rettangoli costruiti usando il valore di  $f(x)$  nell'estremo sinistro.

In ogni pezzettino l'errore è

$$\leq \underbrace{\text{lung. int.}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{H \cdot \delta^\alpha}_{\text{stima dell'altezza}}$$



Quando somma sugli intervalli ottengo

$$\text{errore} \leq \underbrace{(b-a)}_{\text{base}} \cdot \underbrace{H \cdot \delta^\alpha}_{\text{stima dell'altezza}}$$

Teoremi Sia  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione tale che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Allora

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 0 \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

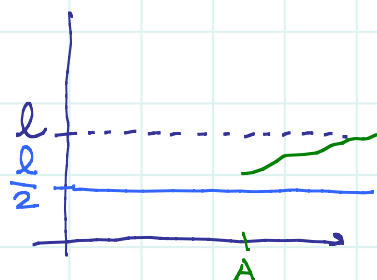
Dim Supponiamo  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0$ .

Allora  $\exists A > a \quad \forall x \geq A \quad f(x) \geq \frac{l}{2}$

Allora

$$\begin{aligned} \int_a^B f(x) dx &= \int_a^A f(x) dx + \int_A^B f(x) dx \\ &\geq \int_a^A f(x) dx + \frac{l}{2} (B-A) \end{aligned}$$

$$\forall B \geq A$$

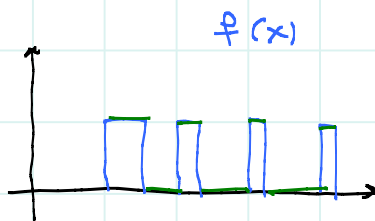


Quando mando  $B \rightarrow +\infty$  ottengo che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = +\infty \quad \text{che è assurdo.}$$

Idea se  $\limsup f(x) = L < 0$ .

Esempio classico



base:  $\frac{1}{n^2}$     altezza: 1    oppure    base =  $\frac{1}{n^3}$     altezza: n

Teorema Sia  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uniform. cont. e tale che

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

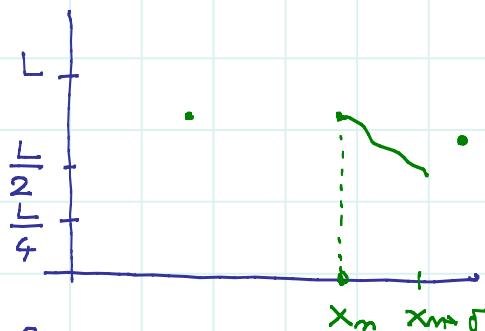
Morale: se  $f$  va in alto, poi ci mette il suo tempo a scendere!

Dim Supponiamo come prima  $L = \limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$

Allora per caratterizzare

$\exists x_n \rightarrow +\infty$  t.c.

$$f(x_n) \geq \frac{L}{2}$$



Usando l'U.C. con  $\varepsilon = \frac{L}{4}$  trovo  $\delta > 0$  t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{L}{4}$$

e quindi

$$f(x) \geq \frac{L}{4} \quad \forall x \in [x_n, x_n + \delta]$$

Ora considero

$$\int_a^{x_m+\delta} f(x) dx - \int_a^{x_m} f(x) dx = \int_{x_m}^{x_m+\delta} f(x) dx \geq \frac{L}{4} \cdot \delta$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\uparrow \geq \frac{L}{4}$

per  $n \rightarrow +\infty$  tendono  
entrambi a  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

— o — o —

Esercizio Determinare la più piccola costante  $c$  tale che

$$|y e^{-y^2} - x e^{-x^2}| \leq c |x-y| \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Si tratta della costante di Lip., che a sua volta è uguale al sup di  $|f'(x)|$ .

Quindi basta studiare la funzione derivata.

Esercizio Determinare ...  $c$  tale che

$$||\sin(2x)|^{1/2} - |\sin(2y)|^{1/2}| \leq c |x-y|^{1/2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Si tratta della costante di  $\frac{1}{2}$ -Hölder di  $f(x) = |\sin(2x)|^{1/2}$

⊆ Ricordo  $|\sqrt{A} - \sqrt{B}| \leq \sqrt{|A-B|}$  per ogni  $A \geq 0, B \geq 0$   
La applico con  $A = |\sin(2x)|$  e  $B = |\sin(2y)|$  e ottengo

$$\begin{aligned} \text{LHS} &\leq \sqrt{||\sin(2x)| - |\sin(2y)||} && \text{uso } |\sin a - \sin b| \leq |a-b| \\ &\leq \sqrt{2|x-y|} = \sqrt{2} |x-y|^{1/2} && \leadsto c \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

⊇ Prendo  $y=0$  e  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Ottengo  $\sqrt{|\sin(2x)|} \leq c \sqrt{x}$   
 $\uparrow$  così seguiti +

cioè  $\sqrt{\frac{\sin(2x)}{x}} \leq c$

Basta fare il limite per  $x \rightarrow 0^+$  e abbiamo  $c \geq \sqrt{2}$ .

Esempio  $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x})$  quanto è Hölder?

Sicuramente NON lip (derivata)

Sicuramente  $\frac{1}{3}$ -Hölder (composizione di lip. e  $\frac{1}{3}$ -Hölder)

L'unico problema sta in 0 (lontano da lì è lip.)

Idea:  $\cos(\sqrt[3]{x}) = 1 - \frac{1}{2} x^{2/3} + \text{potenze con esp. } > 1$

no tra aria che sia  $\frac{2}{3}$ -Hölder.

— o — o —