

Lipschitz $\Rightarrow$ Hölder $\Rightarrow$ unif. cont. $\Rightarrow$ cont.
 $\uparrow$
 se f è limit.

Hölder $\Rightarrow$ u.c. Ipotesi: $|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^a$

Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \dots |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Mi viene dato $\varepsilon > 0$. Pongo (... voglio $H \delta^a \leq \varepsilon \leadsto \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/a}$)

$$\delta := \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/a}$$

e per ipotesi

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^a \leq H \delta^a = \varepsilon \quad \square$$

Notazione

$C^0 \leadsto$ funzione continua

$C^1 \leadsto$ funzione derivabile

$C^{0,\alpha} \leadsto$ funzione α -Hölder $\alpha \in (0,1]$

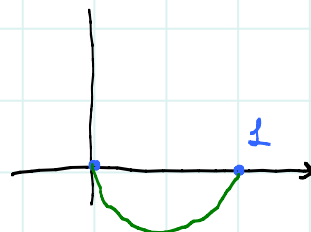
$C^{2026,\alpha} \leadsto$ funzione derivabile 2026 volte con $f^{(2026)}$ che è α -Hölder

$C^{0,1} \leadsto$ funzione Lipschitz

Esempio 1 Voglio $f \in C^{0,\alpha}$ per ogni $\alpha \in (0,1)$, ma $f \notin C^{0,1}$.

Claim: $f(x) = x \cdot \log x$

(N.B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$)



NON è lip. in $(0,1)$ perché $f'(x)$ non è limitata.

Dico che è α -Hölder per ogni $\alpha \in (0,1)$.

Considero $|f(x)|^\alpha$ e dimostro che è lip.

Per semplicità pongo $\frac{1}{a} = b > 1$. $|f(x)|^{\frac{1}{a}} = x^b \cdot |\log x|^b$
La derivata è

$$\underbrace{b x^{b-1} \cdot |\log x|^b}_{\rightarrow 0} \pm \underbrace{x^b \cdot b |\log x|^{b-1} \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0}$$

Essendo $b > 1$, entrambi i termini $\rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0^+$

Esempio 2 $f(x) = \frac{1}{|\log x|}$ in $(0, \frac{1}{2})$
 $\uparrow$ voglio star lontano dal problema in $x=1$

Claim: f è U.C., ma $f \notin C^{0,\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, 1]$.

U.C. La estendo a $[0, \frac{1}{2}]$ ponendo $f(0) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) =$ quello che viene
L'estensione risulta continua $\leadsto$ U.C. per H.C.

NO HÖLDER Non posso dimostrare che $|f|^{\frac{1}{\alpha}}$ NON è Lip., perché questa era solo cond. suff.

Uso la definizione negata. Suppongo

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^a$$

Facendo tendere $y \rightarrow 0^+$ troverei

$$|f(x)| \leq H x^a$$

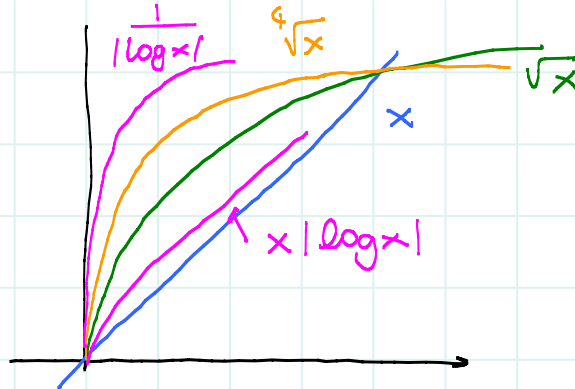
cioè

$$\frac{1}{|\log x|} \leq H x^a$$

cioè $\underbrace{x^a \cdot |\log x|}_{\downarrow} \geq \frac{1}{H} \quad \forall x \in (0, \frac{1}{2})$

$\downarrow$ Ma questo $\rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$
— 0 — 0 —

Riassunto grafico



Def. (Modulo di continuità). Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se accade che

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

$\uparrow$ omega

per una opportuna $\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, allora si dice che f è ω -continua ($C^{0,\omega}$).

Il caso interessante è quello in cui $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0$.

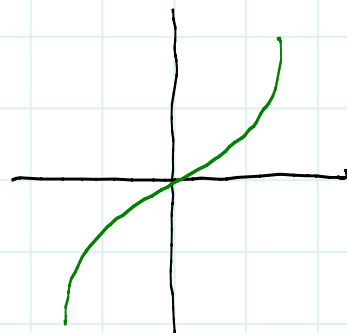
Esempio 3 $f(x) = \arcsin x$

In $[0, \frac{1}{2}]$: Lipschitz (derivata limitata)

In $[0, 1]$: NO Lip

o.c.? H.C.

$\frac{1}{2}$ -Hölder probabilmente



Dim. che non è più di $\frac{1}{2}$ -Hölder. Definizione negata

$$|\arcsin x - \arcsin y| \leq H |x - y|^a$$

Ne la gioco con $x=1$ e $y=1-t$, o ancora meglio con $x=\sin \frac{\pi}{2}$ e $y=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

Mi ritrovo

$$\left| \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right| \leq H \left| \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right|^a$$

cioè

$$\theta \leq H |1 - \cos \theta|^a$$

da cui

$$\frac{(1 - \cos \theta)^a}{\theta} \geq \frac{1}{H} \quad \left(\frac{1 - \cos \theta}{\theta^{1/a}} \right)^a \geq \frac{1}{H}$$

Ma a sx tende a 0 non appena $a > \frac{1}{2}$

Esempio 4 $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$

$$(0,1) \quad f'(x) = \underbrace{\frac{\cos(x^2) \cdot 2x}{x}}_{\text{limitato}} - \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\text{limitato}} \rightsquigarrow \text{Lip.}$$

$$(1, +\infty) \rightsquigarrow \text{IDEM}$$

Esempio 5 $f(x) = \frac{\sin(x^3)}{x}$

$$(0,1) \quad f'(x) = \frac{\cos(x^3) \cdot 3x^2}{x} - \frac{\sin(x^3)}{x^2} \rightsquigarrow \text{ancora Lip}$$

$$(1, +\infty) \quad f'(x) \text{ NON LIM} \Rightarrow \text{NO Lip}$$

f è U.C. perché continua + tende a 0 all'infinito

Esempio 6 $f(x) = x^x$

$$(1, +\infty) \quad \text{NO U.C. (cresce troppo: non è sublineare)}$$

$$(0, 2026) \quad f(x) = e^{x \log x} \quad \text{NO Lip (basta fare la derivata)}$$

U.C. $\rightsquigarrow$ estendo + H.C.

$f \in C^{\alpha, \alpha}((0, 2026))$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$.