

PROPRIETÀ FUNZIONI HÖLDERIANE

① Somma / Differenza: f e g α -Hölder in $A \Rightarrow f \pm g$ idem

Dim.

$$\begin{aligned}
 |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
 &\leq M_f |x - y|^\alpha + M_g |x - y|^\alpha \\
 &= (M_f + M_g) |x - y|^\alpha
 \end{aligned}$$

Idem per la differenza

② Prodotto per una costante: f α -Hölder in $A \Rightarrow \lambda f$ α -Hölder in A

Dim.

$$\begin{aligned}
 |\lambda f(x) - \lambda f(y)| &= |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| \\
 &\leq |\lambda| \cdot M_f |x - y|^\alpha
 \end{aligned}$$

③ Prodotto di 2 Hölder: va male anche per le Lip...

④ f e g Hölder + Limitate in $A \Rightarrow f \cdot g$ è Hölder in A

Dim.

$$\begin{aligned}
 |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| &\leq |f(x) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(x)| \\
 &\quad + |f(y) \cdot g(x) - f(y) \cdot g(y)| \\
 &\leq \underbrace{M_g}_{\substack{\uparrow \\ \text{bound} \\ \text{su } g}} \cdot M_f |x - y|^\alpha + M_f \cdot M_g |x - y|^\alpha = (\dots) \cdot |x - y|^\alpha
 \end{aligned}$$

⑤ Lip $\Rightarrow$ Hölder? NO! anzi NO!

$f(x) = x$ è Lip. in $\mathbb{R}$, ma NON è $\frac{1}{2}$ Hölder! (le funzioni $\frac{1}{2}$ Hölder crescono al più come $x^{1/2}$)

$$\boxed{5.1} \quad \left. \begin{array}{l} A \text{ limitata} \\ f \text{ } a\text{-Hölder in } A \\ b \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ } b\text{-Hölder in } A$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad |f(x) - f(y)| &\leq M_a |x-y|^a & H_p: f \text{ è } a\text{-Hölder} \\ &= M_a |x-y|^{a-b} |x-y|^b \\ &\leq M_a \cdot \underbrace{(\text{diam } A)^{a-b}}_{\sup A - \inf A} |x-y|^b \\ &= M_b |x-y|^b \end{aligned}$$

$$\boxed{5.2} \quad \left. \begin{array}{l} f \text{ } a\text{-Hölder in } A \\ f \text{ limitata in } A \\ b \leq a \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ } b\text{-Hölder in } A$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad |f(x) - f(y)| &= \underbrace{|f(x) - f(y)|^{1-\frac{b}{a}}}_{\leq (2M_f)^{1-\frac{b}{a}}} \cdot \underbrace{|f(x) - f(y)|^{\frac{b}{a}}}_{\leq \{M_f |x-y|^a\}^{\frac{b}{a}}} \\ &\leq (2M_f)^{1-\frac{b}{a}} \cdot \{M_f |x-y|^a\}^{\frac{b}{a}} \\ &\quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{diam.} \\ \text{in arrivo} \end{array} \\ &\leq \dots \cdot |x-y|^b \end{aligned}$$

6 Composizione: f a -Hölder, g b -Hölder $\Rightarrow g \circ f$ ab -Hölder

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Dim}} \quad |g(f(x)) - g(f(y))| &\leq M_g |f(x) - f(y)|^b \\ &\leq M_g M_f^b |x-y|^{ab} \end{aligned}$$

Domanda: cosa succede nel prodotto se solo una delle due è limitata

L'ESERCIZIO f^2 Lip $\Leftrightarrow f$ $\frac{1}{2}$ -Hölder

$\Leftarrow$ NOPE!

$f(x) = 1 + \sqrt{x}$ è $\frac{1}{2}$ Hölder in $[0, +\infty)$

$f(x)^2 = 1 + x + 2\sqrt{x}$ non è meglio di $\frac{1}{2}$ -Hölder..

$\Rightarrow$ NOPE! $f(x) \in \{+1, -1\}$ a caso. Il $\square$ è costante!

Prop. (Criterio di Hölderianità)

Supponiamo $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e $|f|^{\frac{1}{a}}$ sia Lipschitz.

Supponiamo inoltre A connesso.

Allora f è a -Hölder in A .

Dim. $|f(x) - f(y)| = | (f(x)^{\frac{1}{a}})^a - (f(y)^{\frac{1}{a}})^a |$

$$|A^a - B^a| \leq |A - B|^a \leq H |f(x)^{\frac{1}{a}} - f(y)^{\frac{1}{a}}|^a$$

(lett. prec.)

$$\begin{aligned} &\leq H [L|x-y|]^a \\ &\quad \uparrow \\ &f^{\frac{1}{a}} \text{ è Lip} \\ &\leq H \cdot L^a \cdot |x-y|^a \end{aligned}$$

Sigh! Errore di percorso nello scrivere $f(x) = [f(x)^{\frac{1}{a}}]^a$ ☹

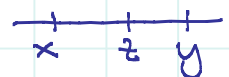
Come la salviamo?

Caso 1 Se $f(x) \geq 0$ e $f(y) \geq 0$, allora ok

Caso 2 Se $f(x) \leq 0$ e $f(y) \leq 0$, allora si aggiusta con un segno-

Caso 3 Se $f(x) > 0$ e $f(y) < 0$ (o viceversa), allora esiste z compreso tale che $f(z) = 0$ (ho usato connessione e continuità)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \\ &\leq \dots |x-z|^a + \dots |y-z|^a \\ &\leq \dots |x-y|^a + \dots |x-y|^a \end{aligned}$$



Esempio $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ in $(0,1)$

Q1 È unif. cont.?

Certo! La estendo a $[0,1]$ ponendo $f(0)=0$ e $f(1)=\sin 1$
Così risulta continua, quindi U.C. per H.C.
e $(0,1)$ è solo più piccolo.

Q2 È lip.?

Certo che NO! $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - x \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$

e questa di sicuro non è limitata

Q3 Quanto è Hölder?

Almeno fino a $\frac{1}{2}$!! Spero che $f(x)^2 = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ sia Lip

La derivata è $2x \cdot \sin^2 \frac{1}{x} + \cancel{x^2} 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{\cancel{x^2}})$

quindi la derivata di $f(x)^2$ è limitata!

Q4 e per $\alpha > \frac{1}{2}$?

Non è più Hölderiana, ma va fatto
usando la definizione

