

TEOREMI

→ ESTENSIONE

TEOREMINI

→ ASINTOTICA A U.C. $\Rightarrow$ U.C.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont.

Allora $\{f(x_m)\}$ è una succ. di Cauchy

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n = \frac{1}{n}$ è di Cauchy, ma $f(x_n) = n$ non lo è

ma il suo limite non è nella zona di continuità di f

Dirichlet Lemma

$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x_n) - f(x_m)| \leq \varepsilon \quad \text{per } n, m \text{ "grandi"}$

Per v.c. di f trovo $\delta > 0$ t.c.

Essendo x_n di Cauchy, dato $\delta > 0$ trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ b.c.

Questo è il valore n_0 che cerchiamo perché $|\underbrace{f(x_n)}_{=0} - \underbrace{f(x_m)}_{=0}| \leq \varepsilon$.

Teorema di estensione Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. cont.

Allora (posso estendere f alla chiusura)

esiste un' unica

$$\hat{f} : \text{Clos}(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

che è unif. cont. e tale che

$$\hat{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Dim Step 1 Definisco $\hat{f}$.

Prendo $x \in \text{Clos}(A)$.

Per il solito lemma esiste $\{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \rightarrow x$

Essendo conv., la succ. $\{x_n\}$ è di Cauchy

Per il lemma precedente, anche $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy, quindi ha limite.

Pongo

$$\hat{f}(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$$

Step 2 La definizione è ben posta, cioè non dipende dalla succ. $x_n \rightarrow x$ che ho scelto. Cioè se $x'_n \rightarrow x$, allora

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = l'$$

Modo elegante Considero la succ. alternata

$$x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', \dots$$

Questa ancora converge a x e quindi $f(x_1), f(x_1'), f(x_2), f(x_2')$... converge a qualcosa, diciamo l , quindi anche sui pari e sui dispari converge ad l .

Modo brutto Fisso $\varepsilon > 0$. Per u.c. ottengo $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ora per n grande $|x_n - x'_n| \leq \delta$, ma allora

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}$$

e passando al limite $|l - l'| \leq \varepsilon$

Step 3 $\hat{f}$ estende f , cioè $\hat{f}(x) = f(x)$ se $x \in A$

Se $x \in A$, posso prendere $x_n \equiv x$, quindi $f(x_n) \equiv f(x)$, quindi è ovvio che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Step 4 $\hat{f}$ è u.c.

Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e voglio trovare $\delta > 0$ t.c.

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon$$

Prendo il δ che corrisponde ad ε nella u.c. di f , e prendo un qualunque $\hat{\delta} \in (0, \delta)$. Dico che questo va bene.

Considero succ. $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Osservo che se

$$|x - y| \leq \hat{\delta}, \text{ allora } |x_n - y_n| \leq \delta \text{ per } n \text{ grande, da cui}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}$$

e passando al limite

$$|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| \leq \varepsilon$$

Question: esiste un caso in cui il δ per f non va bene per $\hat{f}$?
— o — o —

Conseguenza: se f non si estende, allora f non è u.c.

Esempio $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $(0, 1)$ è continua, ma non u.c.
perché non la posso estendere in $x = 0$
— o — o —

Teorema (Heine - Cantor) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in A ,

(ii) A è compatto.

Allora f è u.c. in A .

DIM 1 (Per assunto via cpt. per succ.)

Devo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Se non fosse vero

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A \exists y \in A \quad |x-y| \leq \delta \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ (oppure $\delta = \frac{1}{2026^n}$)

Otengo x_n e y_n in A t.c.

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$$

Poiché A è cpt. per succ. esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Ma allora anche $y_{n_k} \rightarrow x_\infty$ dal momento che

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leq y_{n_k} \leq x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Ma allora} & |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon_0 \\ & \downarrow \quad \quad \downarrow \\ & f(x_\infty) \quad \quad f(x_\infty) \end{array}$$

da cui $0 \geq \varepsilon_0$, il che è un problema. c
— 0 — 0 —

DIM 2 (Diretta via cpt. per ricoprimenti)

Mi viene dato $\varepsilon > 0$ e vorrei $\delta > 0 \dots$

Essendo f continua

$$\forall x \in A \exists \delta(x, \varepsilon) > 0 \forall y \in A \quad |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Se ora considero $y_1 \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$

$$y_2 \in [x-\delta, x+\delta] \cap A$$

ho che

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_2)| &\leq |f(y_1) - f(x)| + |f(y_2) - f(x)| \leq \varepsilon \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \qquad \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ora osservo che $U_x = (x - \delta(x), x + \delta(x))$

è un ricoprimento aperto di A , quindi ammette un s.ricopr. finito, e quindi c'è un δ positivo comune.

Grosso problema: quando prendo due p.ti x e y in A con $|x - y| \leq \delta$, non è detto che questi stiano nello stesso aperto del s.ricopr. finito!

Via d'uscita! Non prendo il sottoricopr. finito e il δ più piccolo, ma prendo il RAGGIO MAGICO del ricoprimento. Se $|x - y| \leq$ raggio magico, allora x e y stanno in uno stesso aperto del ricopr. iniziale, e quindi tutto va bene.

Oss. Il raggio magico si dimostra comunque per assurdo.

— o — o —